

THÈSE

présentée au

CENTRE D'ORSAY

A L'UNIVERSITE DE PARIS~SUD

Pour obtenir le titre de

DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Chérif BENDJABALLAH

ANALYSE DE CHAMPS OPTIQUES PAR LES
METHODES DE COMPTAGE ET DE COINCIDENCE DE PHOTONS

Soutenue le 23 Juin 1972 devant la Commission d'Examen

Jury P. GRIVET - Président
P. DUMONTET
S. LOWENTHAL
B. PICINBONO
J. YVON

THÈSE

présentée au

CENTRE D'ORSAY

A L'UNIVERSITE DE PARIS~SUD

Pour obtenir le titre de

DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Chérif BENDJABALLAH

ANALYSE DE CHAMPS OPTIQUES PAR LES
METHODES DE COMPTAGE ET DE COINCIDENCE DE PHOTONS

Soutenue le Juin 1972 devant la Commission d'Examen

Jury	P. GRIVET	Président
	P. DUMONTET	
	B. PICINBONO	
	S. LOWENTHAL	
	J. YVON	

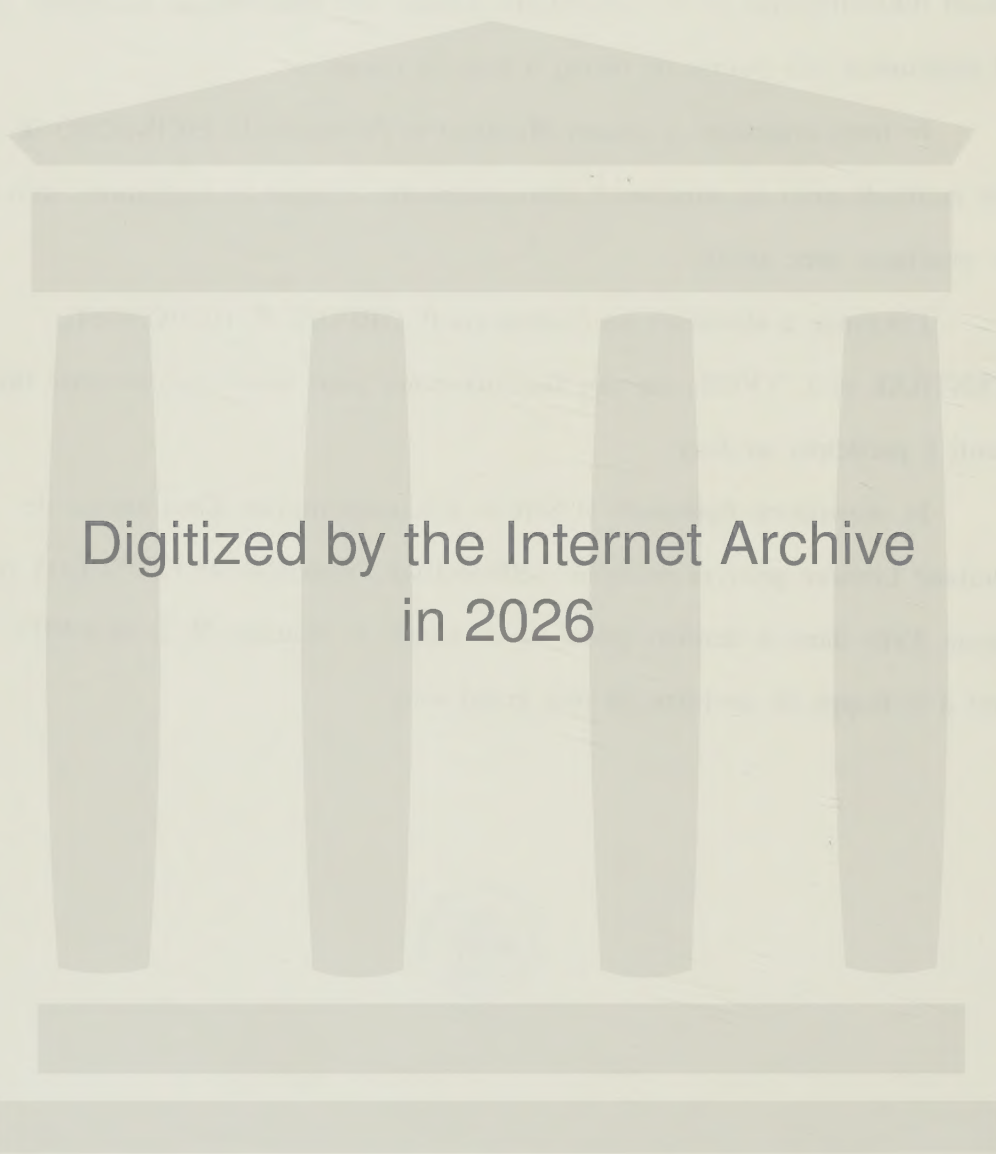


Mes remerciements sont dus à tous ceux, professeurs, chercheurs et techniciens de l'Institut d'Electronique et du Laboratoire d'Etude des Phénomènes Aléatoires, dont l'accueil chaleureux m'a permis de mener à bien ce travail.

Je tiens cependant à assurer Monsieur le Professeur B. PICINBONO de ma profonde gratitude pour les nombreux encouragements, conseils et suggestions qu'il m'a toujours prodigués avec amitié.

J'exprime à Messieurs les Professeurs P. GRIVET, P. DUMONTET, S. LOWENTHAL et J. YVON, ma vive reconnaissance pour avoir examiné cette thèse et consenti à participer au Jury.

Je remercierai également le Service d'Instrumentation Electronique de l'Accélérateur Linéaire pour sa précieuse collaboration, Mademoiselle F. PERROT pour l'aide reçue d'elle dans la dernière phase de ce travail, et Madame M. T. BOUVIER qui a apporté à la frappe de ce texte, le plus grand soin.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547102_0031

TABLE DES MATIERES

	Pages
Introduction	I
I - DESCRIPTION STATISTIQUE DES CHAMPS OPTIQUES ET DES PHOTOELECTRONS ..	1
I-1. Description statistique des champs	2
I-1.a) Théorie classique	2
I-1.b) Théorie quantique	3
I-1.c) Modèles simples	6
I-2. Statistique des photoélectrons	9
I-2.a) Eléments de la théorie classique	9
I-2.b) Relations générales	10
II - MONTAGES EXPERIMENTAUX POUR L'ANALYSE STATISTIQUE DES PHOTOELECTRONS	20
II-1. Les détecteurs	20
II-1.a) A fort niveau	20
II-1.b) A faible niveau	21
II-2. L'Appareillage électronique	21
II-2.a) L'échantillonnage de l'intensité	21
II-2.b) Loi des compotges	22
II-2.c) loi des intervalles de temps	24
II-2.d) loi des intervalles multiples	25
II-2.e) Fonction de corrélation des fluctuations d'inten- sité	26
III - CHAMP THERMIQUE	28
III-1. Rappels théoriques	29
III-1.a) Temps de mesure très petit devant le temps de cohérence	29
III-1.b) Temps de mesure quelconque	34
III-2. Réalisation d'un champ thermique	38

III-2.a) Généralités	38
III-2.b) Analyse théorique	39
III-2.c) Résultats expérimentaux	42
IV - CHAMPS MODULES EN INTENSITE	45
IV-1. Champs Gaussien réel	46
IV-1.a) Loi des comptages	47
IV-1.b) Loi des intervalles de temps	47
IV-2. Double modulation Gaussienne	50
IV-2.a) Loi des comptages	51
IV-2.b) Loi des intervalles de temps	54
IV-3. Résultats expérimentaux	55
V - ETUDE DES CORRELATIONS D'INTENSITE	57
V-1. Méthode de mesure des fonctions de corrélation de l'inten- sité	59
V-1.a) Méthode à deux détecteurs	59
V-1.b) Méthode à un détecteur	60
V-2. Nature de la fonction de corrélation de l'intensité laser diffusée par verre dépoli	73
V-2.a) Calcul du champ après la lentille	73
V-2.b) Statistique du verre dépoli	75
V-3. Résultats expérimentaux	77
VI - ETUDE DES INTERVALLES MULTIPLES	79
VI-1. Lois de probabilité des intervalles multiples	81
VI-1.a) Loi du temps de vie d'ordre n	81
VI-1.b) Loi du temps d'attente résiduelle d'ordre n	82
VI-2. Intervalles multiples en présence de fluctuations d'inten- sité très lentes	84

VI-2.a) Laser monomode stabilisé en amplitude	84
VI-2.b) Champ pseudo-thermique	85
VI-2.c) Champ Gaussien réel	85
VI-2.d) Champ à double modulation Gaussienne	85
VI-2.e) Conclusions	86
 VI-3. Exemple d'étude sans condition sur les fluctuations d'inten- sité	 87
 VI-3.a) Formulation du problème	 87
VI-3.b) Cas d'un champ à fonction de cohérence exponentielle	88
VI-3.c) Champ à fonction de cohérence Gaussienne - Méthode numérique	90
 VI-4. Résultats numériques et expérimentaux	 93
 VI-4.a) Tests et critiques de la méthode	 93
VI-4.b) Courbes théoriques	94
VI-4.c) Courbes expérimentales	95
 Conclusions	 98

INTRODUCTION

Les recherches dans le domaine assez vaste de la Cohérence Optique connaissent un regain d'activité considérable depuis quelques années. En effet, l'apparition dans les laboratoires des sources laser a renouvelé l'intérêt porté aux expériences d'Optique à deux égards au moins.

Dans le domaine de l'Optique non linéaire, les lasers permettent grâce à leurs importantes possibilités de puissance, de provoquer des transitions à deux ou plusieurs photons : effet Raman, oscillations paramétriques...

En Optique Statistique, ils constituent, avec leurs grandes qualités spectrales qui les rapprochent sensiblement des signaux sinusoïdaux, des sources idéales pour l'étude des propriétés de cohérence associées aux champs lumineux. Les modèles théoriques établis pour les sources naturelles d'émission spontanée à très large spectre, s'avèrent donc incorrects pour l'interprétation des expériences réalisées avec des lasers monomodes, stabilisés en amplitude. Dès lors, la notion de cohérence optique, ayant trait jusque là à la seule possibilité qu'avait une source de rayonnement de donner lieu à des interférences, devient insuffisante.

Par ailleurs, l'adécouverte de l'effet Hanbury-Brown et Twiss, montrant l'existence de corrélation statistique mesurable en deux points différents de l'espace, a suscité de nouvelles idées au sujet de cette notion de cohérence. Ainsi est-il apparu comme nécessaire de définir la cohérence optique comme l'ensemble des propriétés de corrélation statistique des champs optiques.

La première description quantique rigoureuse par la théorie quantique des champs a été introduite par R.J. Glauber qui a expliqué les phénomènes à l'origine de l'effet observé par Hanbury-Brown et Twiss. Mais, parce que cette théorie traite de façon inséparable l'instrument de mesure

(photodétecteur) et l'objet physique (champ optique), le processus d'interaction du rayonnement avec le photodétecteur doit être à son tour étudié et l'ensemble de la théorie donne lieu à des développements complexes.

La description classique, quant à elle, traite le rayonnement indépendamment du procédé de détection du champ et n'a pas besoin de connaître le détail des processus microscopiques reliant la grandeur de sortie (photoélectrons) aux photons du champ.

De plus, s'attachant de très près à la nature des sources optiques et des appareils de mesure utilisés, elle offre souvent une interprétation des problèmes expérimentaux rencontrés, plus complète que ne le permet la théorie quantique.

La présente étude, se situant dans le cadre de la théorie classique, a pour objet principal la discussion et la vérification expérimentale des propriétés de cohérence des fluctuations d'intensité de sources optiques quasi-monochromatiques.

Nous nous limiterons à l'étude des propriétés de cohérence temporelle, et nous admettrons toujours le détecteur comme sans intégration spatiale. Nous considérerons également, dans toute la suite, des champs scalaires, négligeant ainsi les aspects liés à la polarisation.

En raison du caractère aléatoire de l'émission lumineuse et de l'aspect indéterministe de la détection de photons, les notions de cohérence temporelle en Optique sont liés à des concepts de nature statistique. Ainsi un photomultiplicateur placé dans un champ optique de faible flux de photons fournit un signal de sortie sous forme d'une suite d'impulsions très brèves correspondants aux instants (t_i) d'absorption de photons par le photodétecteur, suite aléatoire formant un processus ponctuel. La théorie classique nous donne d'importantes relations entre les lois statistiques de ce processus ponctuel et les propriétés caractéristiques du champ optique ; plus, elle suggère des expériences, concluantes quant à l'analyse

statistique du champ optique, par l'intermédiaire du processus ponctuel de détection.

L'étude expérimentale de ce processus ponctuel a, en effet, été rendue possible grâce aux progrès récents accomplis dans la technologie des photomultiplicateurs et des circuits d'électronique rapide, mais aussi grâce aux développements de nouvelles sources à spectre de fréquence étroit, créées à partir des lasers.

Il est bien établi, maintenant, que le processus ponctuel des instants (t_i) est, en bonne approximation, un processus de Poisson composé, et les expériences qui le prouvent sont fort nombreuses.

Par les méthodes d'analyse par comptages, on étudie les lois de probabilité du nombre aléatoire de points (t_i) dans un intervalle de temps T , et l'on vérifie les lois déduites du modèle de Poisson composé. De même, on obtient un résultat similaire lorsqu'on procède par analyse d'intervalles de temps dont l'objet est la mesure des lois de probabilités des intervalles séparant les (t_i) . Cette dernière méthode, d'ailleurs, se rapproche beaucoup des méthodes de coïncidences d'impulsions qui ont pour but la mesure de la fonction de corrélation de l'intensité, fonction qui joue un rôle important dans la description statistique des champs optiques, et qui permet, en particulier d'expliquer l'effet Hanbury-Brown et Twiss.

De plus, elle peut être reliée simplement à la fonction de cohérence du champ pour de nombreuses sources optiques, spécialement, les sources naturelles. Cependant, aussi importante soit-elle, la fonction de cohérence seule ne suffit pas à décrire complètement la nature statistique du champ étudié. Si l'on désire, par exemple, vérifier le caractère Gaussien du champ d'une source naturelle quelconque, on se heurte à des problèmes difficiles à résoudre car le photodétecteur aura un temps de réponse trop long par rapport au temps de corrélation de la lumière et la mesure s'en trouvera affectée.

C'est pourquoi la réalisation de la source "pseudo-thermique" obtenue expérimentalement par diffusion d'un laser monomode stabilisé en amplitude sur un verre dépoli tournant, offre l'intéressante possibilité de créer une source possédant les caractéristiques d'une source naturelle à grand temps de corrélation et permet de vérifier ainsi nombre de propriétés associées au caractère Gaussien du champ.

Ce champ que l'on peut, dans une certaine mesure, considérer comme obtenu par modulation linéaire aléatoire en amplitude du champ laser incident, suggère d'élargir la classe de champs optiques "artificiels" créés à partir du laser.

Expérimentalement, il est en effet, possible de réaliser des systèmes de modulation en intensité de la source incidente et d'engendrer une catégorie de champs optiques à propriétés statistiques nouvelles.

Nous disposerons donc, en plus de la source pseudo-thermique, que l'on peut à son tour moduler en intensité, d'une grande variété de champs optiques, nous permettant à la fois d'étudier des lois statistiques nouvelles et de vérifier des calculs développés à leur sujet.

Le chapitre I de ce travail est consacré à un exposé succinct, essayant surtout de rassembler des données théoriques récentes : nous rappelons des éléments de la théorie de la détection de photons et établissons des relations entre les grandeurs mesurées sur le processus des photoélectrons et les lois statistiques du champ optique.

Nous indiquons, dans le chapitre II, les méthodes et les dispositifs expérimentaux qui nous permettent la mesure de grandeurs intéressantes, définies dans le chapitre I.

Une étude particulière de la source pseudo-thermique est faite dans le chapitre III et montre sous quelles conditions le champ diffusé par un verre dépoli tournant, est de caractère Gaussien et possède un spectre de fréquence étroit.

Des résultats généraux sur les sources modulées en intensité par effet électro-optique à partir du laser et de la source pseudo-thermique, sont rappelés ou démontrés, puis vérifiés par l'expérience, dans le chapitre IV.

Connaissant la grande importance accordée à la fonction de corrélation dans la description statistique des champs optiques, nous avons consacré le chapitre V à l'étude comparative des différentes méthodes de mesure de cette fonction et appliqué trois d'entre elles au cas de la source pseudo-thermique ; le résultat essentiel est que la fonction de corrélation des fluctuations d'intensité est d'allure Gaussienne. On y analyse aussi l'influence des principaux paramètres intervenant dans la largeur de raie, afin de vérifier un modèle simple de diffusion par verre dépoli. On développe ensuite, toujours à propos de la fonction de corrélation, des calculs sur la limite d'application des propriétés d'écrétage sur des champs non Gaussiens.

Les calculs théoriques interprétant l'ensemble des expériences des chapitres III et IV font intervenir directement l'intensité et non son intégrale dans le temps comme une théorie rigoureuse nous indiquerait de le faire, mais les temps de cohérence des champs étudiés étant très grands devant les temps de mesure, l'approximation est justifiée. Cependant, lorsque ceci n'est pas réalisé, notamment dans l'étude de la loi de probabilité d'une somme d'un nombre important de variables aléatoires corrélées, l'intensité à considérer est bien l'intégrale dans le temps de l'intensité instantanée.

On montre, s'agissant du champ pseudo-thermique, que la solution du problème se ramène à la détermination des valeurs propres de la fonction de cohérence obeissant à une équation intégrale homogène. Une fonction de cohérence de forme Gaussienne rend les calculs des différentes lois cherchées assez délicats et seuls les calculs numériques sont possibles.

Il devient alors très intéressant de les vérifier par des expériences : c'est l'objet du dernier chapitre. On y montre, entre autres résultats qu'à cause de la corrélation entre les variables, la convergence vers la loi normale est beaucoup moins rapide que pour le cas de variables indépendantes.

CHAPITRE I

Description statistique des Champs

Optiques et des photoélectrons

Avant de décrire et de discuter en détail la réalisation et l'interprétation des expériences de comptage et de corrélation de photons, nous donnerons un résumé des relations reliant les informations essentielles recueillies à la sortie d'un photodétecteur aux paramètres du champ optique, mais en évitant les points délicats et les développements trop abstraits.

La théorie de la détection d'un champ optique peut se faire en utilisant soit la description classique du rayonnement, soit la description par les états cohérents de la mécanique quantique des champs introduits, pour cet usage, par R.J. Glauber.

Une règle de correspondance permet, cependant, d'établir de nombreux points de convergence, voire d'équivalence entre les états classiques et les états cohérents.

Nous consacrons donc le premier paragraphe à l'étude du champ lumineux ; nous y exposons, d'une façon assez générale, les principaux résultats des théories classique et quantique. Nous rappelons également, très brièvement, quelques modèles simples de champ optique (laser, thermique, champs modulés).

Le deuxième paragraphe traitera de l'étude des propriétés statistiques des photoélectrons et développera des résultats théoriques utiles pour notre travail expérimental.

I-1. Description statistique des champs

I-1.a) Théorie classique :

Les notions de cohérence temporelle en Optique sont inséparables de concepts de nature statistique et, par des considérations générales sur l'émission lumineuse, on est conduit à poser que le champ électrique $X(t)$ n'est pas déterministe mais représenté par une fonction aléatoire stationnaire à valeurs réelles, définie complètement par sa loi temporelle ou également décrite par l'ensemble de ses moments. Toutefois, pour introduire la notion d'intensité lumineuse, il est d'usage d'utiliser le concept de signal analytique.

Le signal analytique $Z(t)$ associé à $X(t)$ s'obtient en supprimant les fréquences négatives dans la représentation harmonique de $X(t)$, et en multipliant par 2 le résultat. On passe donc de $X(t)$ à $Z(t)$ par une opération de filtrage linéaire. Ceci permet, en particulier, d'affirmer que si $X(t)$ est Gaussienne, $Z(t)$ l'est également.

Dans tous les cas qui nous intéressent, $X(t)$ est une fonction aléatoire quasi-monochromatique (ou à bande étroite), c'est-à-dire de spectre non nul dans une bande de largeur $\Delta\nu$ très petite devant la fréquence centrale ν_0 de sorte que l'on a :

$$(I-1) \quad X(t) = A(t) \cos(2\pi\nu_0 t + \Phi(t))$$

Dans ce cas, on peut montrer que la signal analytique de $X(t)$ s'écrit

$$(I-2) \quad Z(t) = A(t) e^{i\Phi(t)} e^{2\pi i\nu_0 t}$$

En raison du caractère quasi-monochromatique, $A(t)$ et $\Phi(t)$ sont lentement variables devant $\cos 2\pi\nu_0 t$, et nous appellerons ces fonctions amplitude et phase instantanées du champ optique.

De plus $A(t) e^{i\Phi(t)}$ est l'amplitude complexe.

Le signal analytique permet d'introduire très simplement l'intensité

.....

On sait que tous les détecteurs actuellement connus sont sensibles à l'énergie du champ, proportionnelle à $X^2(t)$.

D'après (I-1) cette fonction s'écrit :

$$(I-3) \quad \frac{1}{2} A^2(t) + \frac{1}{2} A^2(t) \cos(4\pi\nu_0 t + 2\Phi(t))$$

Le deuxième terme de (I-3) varie très rapidement au cours du temps et a une moyenne nulle. Le signal de sortie du détecteur est donc proportionnel à $A^2(t)$, qui est appelé Intensité instantanée du champ et s'écrit d'après (I-2)

$$(I-4) \quad I(t) = A^2(t) = Z(t) Z^*(t) = |Z(t)|^2$$

On voit ainsi que le signal analytique est le moyen le plus adapté pour caractériser l'intensité d'une fonction aléatoire quasi-monochromatique réelle. Les moments de la fonction aléatoire $X(t)$ s'obtiennent à partir de ceux de $Z(t)$ ce qui définit ainsi complètement les propriétés de $X(t)$.

Sous des conditions de stationnarité, on montre que les moments $\Gamma^{(2n)}(t_1 \dots t_{2n})$ d'ordre pair de $Z(t)$ sont les seuls non nuls et s'écrivent sous la forme :

$$(I-5) \quad \Gamma^{(2n)}(t_1 \dots t_{2n}) = \langle Z(t_1) \dots Z(t_n) Z^*(t_{n+1}) \dots Z^*(t_{2n}) \rangle$$

Dans toute la suite le symbole $\langle \dots \rangle$ représente l'opération de moyenne d'ensemble qui, pour les champs stationnaires et ergodiques qui nous intéressent désigne aussi l'opération de moyenne temporelle

$$\langle \dots \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \dots dt$$

Une expérience d'interférences lumineuses s'interprète à l'aide de $\Gamma^{(2)}$ réduite à l'ordre 2 en Z , et une expérience de corrélation d'intensité sera décrite à l'aide de $\Gamma^{(4)}$ prise à l'ordre 4 en Z .

I-1.b) Théorie quantique

Les niveaux lumineux intervenant dans les expériences de comptage de photons étant très faibles, les effets quantiques sont importants. R.J. Glauber (22) a, le premier, montré qu'il était nécessaire de quantifier le champ électro-

magnétique pour interpréter les phénomènes de détection de photons tel l'effet Hanbury Brown et Twiss, par exemple.

D'après la théorie de Glauber, les propriétés statistiques physiquement mesurables d'un champ quasi-monochromatique sont complètement caractérisées par la donnée des fonctions de corrélation d'ordre n :

$$(I-6) \quad G^{(n)}(x_1 \dots x_n) = \text{Tr} \left\{ \rho E^{(-)}(x_1) \dots E^{(-)}(x_n) E^{(+)}(x_{n+1}) \dots E^{(+)}(x_{2n}) \right\}$$

où $E^{(-)}$ et $E^{(+)}$ sont respectivement les parties à fréquence négative et positive des opérateurs associés au champ au point considéré.

On note que cette décomposition est tout à fait analogue à ce qui est fait en théorie classique pour introduire le signal analytique et il y a là une analogie profonde qu'une théorie plus développée permet d'interpréter.

Pour l'équation (I-6) ρ désigne l'opérateur densité décrivant le mélange statistique des états quantiques et x_n est la coordonnée espace-temps $(\vec{r}_n, t_n)$.

On montre que la partie à fréquences positives du champ électrique se décompose en série de Fourier sous la forme

$$(I-7) \quad E^{(+)}(x) = i \sum_k \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2}} u_k(x) a_k$$

où

$$(I-8) \quad u_k(x) = u_k(\vec{r}) e^{-i \omega_k t}$$

$u_k(\vec{r})$ sont les solutions de l'équation de Laplace relative au champ confiné à l'intérieur d'une cavité cubique de côté L et ω_k le mode de vibration de la cavité résonnante ainsi constituée.

Les a_k sont les opérateurs de destruction de photons d'énergie $\hbar \omega_k$ et tels que

$$(I-9) \quad a_k |\alpha_k\rangle = \alpha_k |\alpha_k\rangle$$

où $|\alpha_k\rangle$ sont les états propres de cet opérateur et appelés "états cohérents".

Dans l'état $|\alpha_k\rangle$ la valeur propre associée à l'opérateur $E^{(+)}$

s'écrit :

$$(I-10) \quad \mathcal{E}(\vec{r}, t) = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2}} u_k(r) e^{-i \omega_k t} \alpha_k$$

Notons que le champ ne commute pas avec l'énergie, dans l'état $|\alpha_k\rangle$, le nombre n de photons est une quantité aléatoire.

Les quantités relatives à n sont accessibles à partir de la donnée de la probabilité pour que l'état unique $|\alpha_k\rangle$ contienne n photons

$$(I-11) \quad P_{\alpha_k}(n) = |\langle n | \alpha_k \rangle|^2$$

où $|n\rangle$ sont les états propres de l'énergie du rayonnement. Effectuons le calcul de $P_{\alpha_k}(n)$.

Les $|\alpha_k\rangle$ se décomposent dans la base des états $|n\rangle$ suivant la relation :

$$(I-12) \quad |\alpha_k\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} |\alpha_k|^2\right) \sum_n \frac{\alpha_k^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

d'où

$$(I-13) \quad P_{\alpha_k}(n) = \exp(-|\alpha_k|^2) \frac{|\alpha_k|^{2n}}{n!}$$

Pour un ensemble de modes $|\{\alpha_k\}\rangle = \prod_k |\alpha_k\rangle$ en mélange statistique, Glauber a introduit, pour la matrice densité ρ la représentation diagonale $P(\{\alpha_k\})$ telle que

$$(I-14) \quad \rho = \int P(\{\alpha_k\}) \prod_k (|\alpha_k\rangle \langle \alpha_k|) d^2 \alpha_k$$

$P(\{\alpha_k\})$ n'étant pas quelconque puisqu'on doit vérifier

$$(I-15) \quad \text{Tr } \rho = 1$$

Calculons la probabilité du nombre de photons dans un mode donné parmi une assemblée de modes. En opérant de la même manière que précédemment pour le calcul de $P_{\alpha_k}(n)$, on trouve :

$$(I-16) \quad P(n) = \int \frac{P(\alpha)}{n!} |\alpha|^{2n} \exp(-|\alpha|^2) d^2 \alpha$$

formule tout à fait analogue à celle établie, en théorie classique, par

L. Mandel ⁽³⁶⁾ dans laquelle il faut identifier α au champ et $|\alpha|^2$ à l'inten-

sité lumineuse.

En théorie quantique, les situations expérimentales sont décrites par la fonction $P(\alpha)$ appropriée. Cependant ces modèles à un seul mode ne faisant pas apparaître le spectre temporel des fluctuations du champ ne constituent qu'une idéalisation de la réalité physique. On peut, évidemment, introduire des $P(\{\alpha_k\})$ ⁽²⁴⁾ tenant compte de plusieurs modes d'oscillations et faire apparaître une raie spectrale pour le champ mais la théorie ainsi complétée devient de présentation compliquée. Notons également qu'en théorie quantique, la fonction $P(\alpha)$ n'est pas nécessairement positive (bien que ρ soit une matrice définie positive) tandis que l'analogue classique de $P(\alpha)$ est une densité de probabilité, positive obligatoirement. Tous les calculs faits sur des champs relatifs à des fonctions $P(\alpha)$ négatives ne semblent pas se rapporter à des cas physiques réalisables expérimentalement, pour l'instant.

C'est pourquoi l'exposé classique que nous adopterons dans la suite, s'il ne donne pas de résultats différents ou plus complets que l'exposé quantique, a cependant l'avantage de la simplicité.

Donnons quelques éléments des modèles de radiations lumineux utilisés dans la partie expérimentale de ce travail.

I-1.c) Modèles simples

$\alpha)$ champ Laser

Très au dessus du seuil d'oscillation, le champ monomode stabilisé an amplitude est une onde quasi-monochromatique ayant de très faibles fluctuations d'intensité.

La loi de probabilité de l'intensité est correctement décrite par une fonction de Dirac δ centrée en $\langle i \rangle = i_0$

$$(I-17) \quad p(i) = \delta(i - i_0)$$

Le signal analytique associé au champ électrique n'est pas Gaussien et la largeur de raie est essentiellement due aux fluctuations de phase. Plusieurs

modèles théoriques ont été utilisés pour décrire les propriétés statistiques de $\Phi(t)$ ⁽⁴⁷⁾ : fréquence $\frac{d\psi}{dt}$ Gaussienne, diffusion de la phase Φ en mouvement Brownien ⁽⁴⁶⁾, sauts discrets de fréquence et de phase.

Il faut remarquer cependant que les théories supposant l'origine quantique du bruit ne rendent pas compte de la réalité. La largeur de raie qu'elles fournissent est bien inférieure à celle qu'on observe expérimentalement.

β) champ thermique

Ce champ est défini par une fonction scalaire aléatoire réelle, quasis-monochromatique, stationnaire et Gaussienne.

Il en résulte que tous les moments $\Gamma^{(2n)}$ données par (1-5) s'expriment en fonction du moment du deuxième ordre.

En notant que $\langle Z(t_1) Z(t_2) \rangle = 0$, l'expression générale des moments du 4^o ordre en Z , par exemple, s'écrira :

$$(I-18) \quad \langle Z(t_1) Z(t_2) Z^*(t_3) Z^*(t_4) \rangle = \langle Z(t_1) Z^*(t_3) \rangle \langle Z(t_2) Z^*(t_4) \rangle \\ + \langle Z(t_1) Z^*(t_4) \rangle \langle Z(t_2) Z^*(t_3) \rangle$$

soit pour $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0$

$$(I-19) \quad \langle Z(0) Z(0) Z^*(0) Z^*(0) \rangle = \langle i^2 \rangle = 2 [Z(0) Z^*(0)]^2 = 2 \langle i \rangle^2$$

La loi de probabilité de l'intensité i ($i = |Z|^2$) est donnée par :

$$(I-20) \quad p(i) = \frac{1}{\langle i \rangle} \exp\left(-\frac{i}{\langle i \rangle}\right)$$

qui nous permet de retrouver l'expression de $\langle i^2 \rangle$ établie en (1-19), d'une autre manière

$$(I-21) \quad \langle i^2 \rangle = \int_0^\infty i^2 p(i) di = 2 \langle i \rangle^2$$

Le rapport $h = \frac{\langle i^2 \rangle}{\langle i \rangle^2}$ qui nous servira souvent à caractériser les fluctuations du champ optique, appelé effet de groupement des photoélectrons pour des raisons que nous détaillerons dans la suite, prend des valeurs remarquables suivant le type de champ étudié :

- champ laser $h = 1$
- champ thermique $h = 2$

γ) champs modulés

Les modèles étudiés succinctement en α) et β) se généralisent par la construction de modèles de champs modulés. En effet, à partir des champs optiques naturels que nous connaissons (laser, thermique), il est possible par modulation d'intensité, d'obtenir une grande variété de champs optiques, les englobant. Les propriétés statistiques de l'intensité qu'on en déduit montrent, en particulier, un accroissement des moments et de la valeur du rapport h précédemment introduit. Une étude plus détaillée de ces champs sera faite dans le chapitre IV de ce travail.

I-2. Statistique des photoélectrons

Un détecteur placé dans un champ optique de faible flux de photons, fournit un signal de sortie sous forme d'une série d'impulsions suffisamment brèves, pour qu'on puisse les assimiler à une suite d'instants $\{t_i\}$ constituant un processus ponctuel.

Il est possible, en théorie quantique, de faire une description de ce processus ponctuel permettant d'obtenir certaines propriétés caractéristiques des photoélectrons. Mais cette description est très délicate et est, à beaucoup d'égards, moins complète que celle qu'on peut faire en théorie classique. Nous préférons, pour ces raisons, utiliser, pour tout la suite, l'exposé classique.

1-2.a) Eléments de la théorie classique :

Les instants $\{t_i\}$ correspondant aux instants d'émission de photoélectrons par le détecteur, peuvent être considérés aussi comme les instants d'absorption de photons du champ électromagnétique par le détecteur, très peu couplé au champ, donc sans réaction sur lui.

Le processus ponctuel des $\{t_i\}$ est aléatoire d'une part, parce que le champ optique est aléatoire, mais aussi parce que le processus microscopique d'interaction du champ avec la cathode du détecteur (dans le cas d'un photomultiplicateur) est fondamentalement indéterministe.

Un des problèmes importants de l'Optique statistique est l'étude des propriétés d'amplitude du champ par l'analyse statistique du processus ponctuel de détection.

Nous définirons de définir un processus de Poisson composé par la formule des probabilités de coïncidence d'ordre k .

Soit $N(t)$ le nombre aléatoire de points contenus dans l'intervalle de temps $(0, t)$; $N(t)$ est une fonction aléatoire à accroissement $dN(t)$ corrélés. Soit $\rho(t)$ la densité aléatoire du processus

$$(I-22) \quad \rho(t) = \eta I(t)$$

où $I(t)$ est l'intensité lumineuse définie par (I-4) et η un coefficient non aléatoire proportionnel à l'efficacité quantique du détecteur.

La caractérisation fondamentale du processus ponctuel de détection s'écrit :

$$(I-23) \quad \text{Pr} [dN(t_1) = 1] \cdots [dN(t_k) = 1] = \langle \rho(t_1) \cdots \rho(t_k) \rangle dt_1 \cdots dt_k$$

avec la condition $\text{Pr} [dN(t) > 1] = O(dt)$ qui implique que la variable aléatoire $dN(t)$ ne peut prendre pour valeurs que 0 ou 1.

L'équation fondamentale (I-23) permet de définir les deux premiers moments

$$(I-24) \quad \langle dN(t) \rangle = \text{Pr} [dN(t) = 1] = \langle \rho(t) \rangle dt$$

$$(I-25) \quad \langle dN(t_1) dN(t_2) \rangle = \text{Pr} [(dN(t_1) = 1) \cdot (dN(t_2) = 1)] = M(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

avec

$$(I-26) \quad M(t_1, t_2) = \langle \rho(t_1) \cdot \rho(t_2) \rangle + \langle \rho(t_1) \rangle \delta(t_1 - t_2)$$

qui ne dépend, dans le cas stationnaire, que de la différence $|t_1 - t_2|$.

I-2.b) Relations générales

Une première méthode d'analyse des processus ponctuels consiste à étudier la loi de probabilité $p(n, T)$ du nombre aléatoire n de points contenus dans un intervalle de temps $(0, T)$; c'est la loi des comptages :

$$(I-27) \quad p(n, T) = \text{Pr} [N(T) = n]$$

avec

$$(I-28) \quad N(T) = \int_0^T dN(t)$$

Pour calculer (I-27), nous allons utiliser l'intermédiaire de la première fonction caractéristique $\varphi_N(u)$ de $N(T)$:

$$(I-29) \quad \varphi_N(u) = \langle e^{iuN} \rangle = \langle e^{iu \int dN(t)} \rangle$$

Divisons l'intervalle $(0, T)$ en sous-intervalles égaux Δt_j tels que

$$(I-30) \quad \begin{cases} \Delta N(t_j) = 1 & \text{avec la probabilité } \rho(t_j) \Delta t_j \\ \Delta N(t_j) = 0 & \text{avec la probabilité } 1 - \rho(t_j) \Delta t_j \end{cases}$$

$$(I-31) \quad \varphi_N(u) \approx \left\langle e^{iu \sum_j \Delta N(t_j)} \right\rangle$$

Conditionnellement à $\rho(t)$ donné

$$(I-32) \quad \begin{aligned} \varphi_{N|\rho}(u) &= \prod_j \left\{ 1 + [(e^{iu} - 1) \rho(t_j) \Delta t_j] \right\} \\ &\approx \prod_j \left\{ \exp[(e^{iu} - 1) \rho(t_j) \Delta t_j] \right\} = \exp\left(\sum_j (e^{iu} - 1) \rho(t_j) \Delta t_j\right) \end{aligned}$$

soit à la limite

$$(I-33) \quad \varphi_{N|\rho}(u) = \exp \left[(e^{iu} - 1) \int_0^T \rho(t) dt \right] = \exp \left[X(T) (e^{iu} - 1) \right]$$

où $X(T)$ est la variable aléatoire $\int_0^T \rho(t) dt$

soit finalement le résultat a priori

$$(I-34) \quad \varphi_N(u) = \left\langle \exp [X (e^{iu} - 1)] \right\rangle$$

Utilisons pour terminer la relation de définition de $\varphi_N(u)$, nous trouvons la relation cherchée

$$(I-35) \quad p(n, T) = \left\langle \frac{X^n}{n!} e^{-X} \right\rangle$$

Une deuxième méthode déduite des $p(n, T)$ et des lois bidimensionnelles $p(n_1, n_2)$, consiste à déterminer la loi de probabilité $q(n, T, \theta)$ du nombre aléatoire n de points contenus dans un intervalle de temps $(\theta, \theta+T)$ après détection d'un point du processus ponctuel à l'origine des temps :

$$(I-36) \quad \begin{aligned} q(n; T, \theta) &= \Pr \{ [dN(0) = 1], [N(\theta, \theta+T) = n] \} / \Pr [dN(0) = 1] \\ &= \frac{1}{\langle Y \rangle} \left\langle e^{-X} \frac{X^n}{n!} \cdot Y \right\rangle \end{aligned}$$

où

$$(I-37) \quad X(T) = \int_{\theta}^{\theta+T} \rho(t) dt$$

$$(I-38) \quad \gamma(o) = \eta I(o) = \rho(o)$$

L'expression des $q(n, T, \theta)$ fait intervenir les fonctions $\Gamma^{(k)}(t)$ définies par (I-5), fonctions de corrélation, d'ordre k supérieur à 2, de l'intensité $I(t)$. En général, ces fonctions sont difficiles à mesurer et leur étude n'est indispensable que lorsque le champ n'est pas Gaussien ⁽⁴⁷⁾.

Nous nous limiterons dans ce travail à l'étude du second ordre en $I(t)$ (donc du quatrième ordre en champ) car ces fonctions d'ordre 2 sont aisément mesurables soit par l'intermédiaire des lois des intervalles séparant les points du processus ponctuel étudié (que nous étudierons plus bas), soit en utilisant les méthodes de coïncidence d'ordre 2, et suffisent à l'explication d'effets spécifiques aux photons, tels que l'effet de groupement par exemple. En effet, d'après l'équation (I-36) on obtient pour la densité de probabilité de coïncidence :

$$(I-39) \quad \Pr [(dN(t_1) = 1) \cdot (dN(t_2) = 1)] = \eta^2 < I(t_1) \cdot I(t_2) > = \eta^2 \Gamma_I(t_2 - t_1)$$

où $\Gamma_I(\tau)$ est la fonction de corrélation temporelle d'ordre 2 de l'intensité.

Une troisième méthode d'analyse des processus ponctuels consiste à étudier les lois de probabilité des variables aléatoires caractérisant les intervalles de temps entre points successifs ou non.

On appelle temps de vie la variable aléatoire mesurant l'intervalle de temps séparant deux points successifs du processus des photoélectrons.

Le temps d'attente résiduelle est la variable aléatoire mesurant l'intervalle de temps séparant un instant origine arbitrairement choisi et le premier point du processus postérieur à cette origine.

Calculons la loi de probabilité $W(o/t)$ du temps de vie t . Pour cela, il faut imposer :

- l'existence d'un point du processus à l'origine
- l'intervalle (o, t) vide
- l'existence d'un point du processus en t

soit :

$$(I-40) \quad W(0|t) = \frac{1}{\langle p \rangle} \langle p(c) e^{-X} p(t) \rangle$$

où X est la variable aléatoire définie par (I-37).

Calculons maintenant la loi de probabilité $W(t)$ du temps d'attente résiduelle t .

Construisons comme précédemment, l'intervalle t ; il faut imposer que :

- l'existence d'une origine quelconque
- l'intervalle $(0, t)$ vide
- l'intervalle d'un point en t

soit

$$(I-41) \quad W(t) = \langle p(t) e^{-X} \rangle$$

où X est encore donnée par (I-37).

Ces deux dernières expressions (I-40) et (I-41) peuvent être étendues à l'ordre $(n+1)$ par l'étude des lois des intervalles multiples. Le chapitre IV de ce travail sera consacré spécialement à cette étude.

Donnons simplement, les expressions de définition de ces lois de probabilité.

Soient $W_n(0/t)$ et $W_n(t)$ ces lois. Nous définissons $W_n(0/t)$ comme la loi de probabilité de détecter un photoélectron à l'instant t (à dt près) compte tenu de la double condition d'avoir détecté un photoélectron à l'origine et d'avoir compté exactement n photoélectrons dans l'intervalle $(0, t)$:

$$(I-42) \quad W_n(0|t) = \frac{1}{\langle p \rangle} \langle p(c) p(t) X^n \frac{e^{-X}}{n!} \rangle$$

On peut aussi définir $W_n(0/t)$ comme la loi de probabilité d'un intervalle de longueur t formé de $(n+1)$ intervalles successifs.

Si maintenant l'origine des intervalles, au lieu d'être un point du processus est laissée arbitraire, alors nous obtenons pour loi de probabilité de la longueur t , la loi $W_n(t)$ qu'on peut écrire :

$$(I-43) \quad W_n(t) = \langle p(t) X^n \frac{e^{-X}}{n!} \rangle$$

Toutes les expressions des grandeurs ci-dessus définies de (I-27) à (I-43) sont en général difficiles à calculer directement, c'est pourquoi il est souvent intéressant de les relier à la fonction génératrice $Q(s, T)$ de la variable aléatoire $X(t)$.

La fonction $Q(s, T)$ s'obtient à partir de la fonction caractéristique $\varphi_X(u)$ associée à la variable $X(T)$:

$$(I-44) \quad Q(s, T) = \varphi_X(is) = \langle e^{-sX} \rangle = \int_0^{\infty} e^{-sx} p(x) dx$$

On voit ainsi sur (I-44) que $Q(s, T)$ se définit aussi comme la transformée de Laplace de $p(x)$.

Mais la définition la plus intéressante dans la théorie des comptages de photons, est celle introduite par R.J. Glauber ⁽²³⁾ qui pose

$$(I-45) \quad Q(s, T) = \langle (1-s)^{N(T)} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (1-s)^n p(n, T)$$

où $N(T)$ est le nombre aléatoire de photoélectrons comptés dans l'intervalle de temps $(0, T)$ et $p(n, T)$ la loi définie par (I-27).

L'expression (I-45) de $Q(s, T)$ permet une définition de $p(n, T)$ sous la forme :

$$(I-46) \quad p(n, T) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{ds^n} Q(s, T) \Big|_{s=1}$$

ce qui prouve que la donnée de $Q(s, T)$ permet d'en déduire $p(n, T)$.

Nous pouvons, d'ailleurs, appliquer cette méthode de calcul (dérivations successives de $Q(s, T)$) à toutes les grandeurs ci-dessus définies et, en général, à toutes les lois unidimensionnelles.

On vérifie sans peine, à partir de (I-45) et (I-35) à (I-38)

$$(I-47) \quad q(n; T, 0) = \frac{1}{\langle I \rangle} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{s} \frac{d}{dT} Q(s, T) \right) \Big|_{s=1}$$

De même, à partir de (I-45) (I-40) et (I-41)

$$(I-48) \quad W(0|t) = \frac{1}{\langle I \rangle} \frac{d^2}{dt^2} Q(s, t) \Big|_{s=1}$$

et

$$(I-49) \quad W(t) = - \frac{d}{dt} Q(s, t) \Big|_{s=1}$$

On obtient $Q(s, t)$ en remplaçant T par t dans (I-45).

Enfin, on peut voir

$$(I-50) \quad W_n(0|t) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{s^2} \frac{d^2}{dt^2} Q(s, t) \right) \Big|_{s=1}$$

Dès lors, on calcule facilement les moments d'ordre k , définis par la relation :

$$(I-51) \quad N_k = \langle n^k \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^k p(n, T)$$

et les moments factoriels F_k par la dérivée d'ordre k de $Q(s, T)$:

$$(I-52) \quad F_k = \langle n^{[k]} \rangle = \sum [n(n-1) \dots (n-k+1)] p(n, T) \\ = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} Q(s, T) \Big|_{s=0}$$

Il est facile de voir que les F_k peuvent être exprimés par des combinaisons linéaires des N_k ; par exemple pour les premiers moments :

$$(I-53) \quad \begin{aligned} F_1 &= N_1 \\ F_2 &= N_2 - N_1 \\ F_3 &= N_3 - 3 N_2 + 2 N_1 \\ F_4 &= N_4 - 6 N_3 + 11 N_2 - 6 N_1 \\ &\dots \end{aligned}$$

Toutefois, il est difficile de donner l'expression générale à l'ordre quelconque de ces relations.

De même, il est souvent intéressant de connaître les cumulants factoriels C_k de n que l'on définit à partir de la seconde fonction génératrice par

$$(I-54) \quad K(s) = \text{Log } Q(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k C_k \frac{s^k}{k!}$$

On peut naturellement relier les C_k aux moments de X de la même façon qu'on relie les moments factoriels F_k de n aux moments de X .

En écrivant $Q(s)$ de deux manières

$$\begin{aligned} & - \text{relation de définition} & Q(s) &= \langle e^{-sX} \rangle \\ & - \text{relation (I-54)} \end{aligned}$$

on établit :

$$(I-55) \quad \begin{aligned} C_1 &= N_1 \\ C_2 &= N_2 - N_1^2 \\ C_3 &= N_3 - 3 N_2 N_1 + 2 N_1^3 \\ C_4 &= N_4 - 4 N_3 N_1 - 3 N_2^2 + 12 N_2 N_1^2 - 6 N_1^4 \\ &\dots \end{aligned}$$

On voit que la donnée de $Q(s, t)$ permet d'en déduire les principales grandeurs accessibles expérimentalement. Cependant, on remarque que ces expressions sont reliées aux grandeurs statistiques du champ non pas directement mais par la fonctionnelle de l'intensité (I-37).

Ceci constitue un problème compliqué de la théorie du calcul des probabilités car il est, en général, très difficile d'exprimer la densité de probabilité de X en fonction de la loi temporelle de l'intensité $I(t)$ et a fortiori de celle du processus du champ optique $X(t)$.

Néanmoins dans certains cas particuliers (champs gaussiens) que nous détaillerons dans les deux derniers chapitres, nous arrivons à résoudre ce problème et à donner des solutions analytiques ou numériques aux lois de X et à ses divers moments.

Evidemment, le cas le plus intéressant expérimentalement, est celui pour lequel l'intensité intervient directement et non plus par une fonctionnelle.

C'est le cas, en particulier, lorsque T est très court devant le temps de corrélation τ_c des fluctuations d'intensité ; alors, on peut écrire :

$$(I-56) \quad \chi(\tau) \sim \gamma I T$$

Cette brève étude de statistique des photoélectrons émis par un détecteur nous a conduit à considérer d'abord le cas $\tau_c \gg T$.

Une étude similaire peut-être, naturellement, faite pour le cas $\tau_c \ll T$. Les expressions des principales lois statistiques ont été établies par R.J. Glauber ⁽²²⁾ pour les $p(n, T)$ et par E.R. Pike ⁽²⁸⁾ pour les $p(i)$ et $Q(s, T)$.

Il convient de remarquer néanmoins, que dans ces deux derniers cas ($\tau_c \ll T, \tau_c \gg T$) les grandeurs que l'on peut calculer, ignorent la dépendance temporelle du champ.

Si l'on s'intéresse à l'évolution du champ au cours du temps, la loi $p(n, T)$ pour $\tau_c \ll T$ ou $\tau_c \gg T$ ne suffit plus et il faut étudier les lois à plusieurs dimensions.

Ceci se fait par exemple en mesurant les $p(n, T)$ à T quelconque et en comparant les courbes obtenues à différents T .

Cette méthode a été effectivement employée pour l'étude de la fonction de corrélation du champ Gaussien à spectre Lorentzien par F.T. Arecchi ⁽¹⁾ et plus tard par L. Mandel ⁽³⁹⁾

Une autre façon d'aborder la question consiste aussi à réaliser des comptages à deux dimensions, comptages effectués dans les intervalles disjoints T_1 et T_2 (T_1 et $T_2 \ll \tau_c$) séparés par un intervalle de temps θ quelconque devant τ_c . Cette méthode a également été employée par F.T. Arecchi et Col. ⁽³⁾ et constitue une généralisation des lois unidimensionnelles.

Donnons quelques résultats de cette dernière méthode.

La loi de probabilité des comptages s'écrit :

$$(I-57) \quad p(n_1, T_1; n_2, T_2) = \frac{(-1)^{n_1+n_2}}{n_1! n_2!} \frac{d^{n_1+n_2}}{ds_1^{n_1} ds_2^{n_2}} Q(s_1, s_2) \Big|_{s_1=s_2=1}$$

où $Q(s_1, s_2)$ est la fonction génératrice à deux dimensions :

$$(I-58) \quad Q(s_1, s_2) = \left\langle e^{-s_1 \int_{t_1}^{t_1+T} I(\theta_1) d\theta_1 - s_2 \int_{t_2}^{t_2+T} I(\theta_2) d\theta_2} \right\rangle$$

On calcule alors, sans difficulté, les moments factoriels

$$(I-59) \quad N_{k_1, k_2} = \langle n_1^{k_1} n_2^{k_2} \rangle = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} n_1^{k_1} n_2^{k_2} p(n_1, T; n_2, T_2)$$

et

$$(I-60) \quad F_{k_1, k_2} = \langle n_1^{[k_1]} n_2^{[k_2]} \rangle = (-1)^{k_1+k_2} \frac{d^{k_1+k_2}}{ds_1^{k_1} ds_2^{k_2}} Q(s_1, s_2) \Big|_{s_1=s_2=0}$$

Les formules bidimensionnelles écrites ci-dessus peuvent être étendues aisément à un ordre plus élevé.

Les expressions de N_{k_1, k_2} et F_{k_1, k_2} pour k_1 et k_2 supérieurs à 1 se rencontrent dans l'étude de la statistique d'absorption à plusieurs photons.

Pour $k_1 = k_2 = 1$, on s'aperçoit que :

$$(I-61) \quad N_{1,1} = F_{1,1} = G^{(2)}, \quad G^{(2)} \text{ est la fonction de corrélation}$$

d'ordre 2 en intensité :

$$(I-62) \quad G^{(2)}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} n_1 n_2 p(n_1, T_1; n_2, T_2) = \langle n_1(t_1, dt_1) \cdot n_2(t_2, dt_2) \rangle$$

Pour des champs stationnaires que nous considérons, $G^{(2)}$ ne sera fonction que de $t = |t_2 - t_1|$ et nous pouvons écrire

$$(I-63) \quad G^{(2)}(t_1, t_2) = G^{(2)}(t)$$

avec comme valeurs aux limites :

$$(I-64) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} G^{(2)}(t) (dt)^2 = \langle n \rangle^2$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} G^{(2)}(t) (dt)^2 = \langle n^2 \rangle$$

Nous allons pouvoir appliquer l'ensemble de ces résultats théoriques à des champs particuliers réalisables expérimentalement et voir comment les expressions générales rappelées ci-dessus se développent et prennent des formes beaucoup plus simples.

CHAPITRE II

Montages expérimentaux pour l'analyse statistique des photoélectrons.

Nous considérons l'un quelconque des champs optiques décrits classiquement comme en I-1.a et que nous nous représentons suivant l'un des modèles classiques simples exposés précédemment en I-1.b.

Il s'agit alors de détecter les fluctuations de ce champ optique et de mesurer les grandeurs (lois de probabilité, moments, fonction de corrélation, ...) que nous avons calculées, en toute généralité, en I-2b.

Nous ne présentons donc dans ce chapitre que les principes des méthodes expérimentales d'étude des processus ponctuels constitués par les photoélectrons à la sortie d'un détecteur ; nous détaillerons ultérieurement les moyens d'obtention des différentes sources optiques utilisées.

II-1) Les détecteurs

Nous avons disposé de trois types de photomultiplicateur (P.M.) réalisant le meilleur compromis : bonne efficacité quantique à 6328 Å et faible bruit d'obscurité.

a) à fort niveau

Le P.M. RTC 150 CVP (réponse spectrale S.1 suivant la codification RCA), de courant d'obscurité inférieur à 1 μ A, a été utilisé pour les mesures d'échantillonnage d'intensité.

II-1.b) A faible niveau

Pour les mesures de comptage de photoélectrons exigeant un faible taux de thermoélectrons, nous avons opéré avec le P.M. ITT FW 130 (réponse spectrale S. 20) d'efficacité quantique 5% à 6328 Å. Le bruit est approximativement de 40 thermoélectrons par seconde à température ambiante. La réponse en fréquence est cependant moyenne ; la largeur à mi-hauteur des impulsions anodiques, que nous avons obtenues, est de l'ordre de 10 ns.

Les mesures d'intervalles de temps pour lesquelles une bonne résolution temporelle est davantage nécessaire ont été faites avec le P.M. RTC 56 TVP (réponse spectrale S. 20), d'efficacité quantique 7%. La largeur des impulsions anodiques est, ici, de l'ordre de 5 ns mais le bruit de thermoélectrons est nettement plus élevé que dans le cas précédent : à température ambiante, on obtient couramment 10^3 impulsions par seconde.

Cependant, nous avons fait l'essentiel de nos expériences avec ce dernier P.M. car utilisant après le P.M. une électronique à seuil (discriminateur), nous avons constaté qu'en choisissant un seuil même très bas, le nombre T de thermoélectrons devenait négligeable devant le nombre S de photoélectrons de la source ($\frac{S+T}{T} > 10^3$).

II-2. L'appareillage électronique

II-2.a) L'échantillonnage de l'intensité

Le dispositif expérimental est schématisé sur la fig. 1. Le courant électrique issu du P.M. sous forte impédance, est introduit dans le sélecteur d'amplitude Intertechnique SA 43 à 800 canaux par l'intermédiaire d'un amplificateur Tektronix type D utilisé en adaptateur d'impédance.

Un générateur type 3I délivre les impulsions d'ouverture de porte pour le sélecteur (fréquence 10 kHz, largeur 10 μ s).

Les échantillons du signal à analyser sont classés dans la mémoire du sélecteur fonctionnant en analyseur d'amplitudes.

La loi obtenue directement à l'oscilloscope du sélecteur est bien la loi de probabilité $p(i)$ de l'intensité i mesurée sur la durée de l'ouverture de porte ($10 \mu s$), durée choisie très petite devant le temps de cohérence ($\tau_c > 200 \mu s$). La courbe représentative de $p(i)$ est ensuite enregistrée en clair sur une imprimante rapide IER (10 canaux/seconde).

II-2.b) Loi des comptages

Les schémas expérimentaux sont représentés sur les figures 2 et 4.

Les impulsions obtenues par détection de photoélectrons sont d'abord amplifiées à l'aide d'un amplificateur large bande (100 MHz) et de gain élevé ($G = 100$) (tube SAIP 7016) puis calibrés en amplitude et en largeur (700 mV, 5 ns), par un discriminateur SAIP 7018 de gamme 50 mV - 500 mV.

La résolution électronique de l'ensemble limite la densité moyenne des photoélectrons à compter à environ 10^8 impulsions par seconde.

Les impulsions ainsi mises en forme peuvent être alors comptées dans l'échelle rapide (200 MHz) de grande capacité (8 bits) pendant un intervalle de temps T variable ($0,5 \mu s < T < 500 \mu s$). Ce temps T est choisi sur le générateur d'impulsions 3 I qui sert d'horloge pour la porte d'entrée de l'échelle.

L'échelle rapide binaire est constituée d'une série de 8 diodes tunnel (D.T.) fonctionnant en bistables (temps de basculement très bref) reliées à un C.D.A. (convertisseur digital-analogique). Durant le temps d'analyse $(0, T)$, chaque impulsion à compter est, grâce à la logique du CDA, convertie en tension ce qui permet de recueillir comme amplitude de sortie, un échelon de tension dV (fig. ci-dessous).

Lorsque toutes les impulsions (en nombre n) contenues dans $(0, T)$ ont été enregistrées par le CDA, la tension atteinte V_f reste bloquée à sa valeur finale (ex. sur la fig. V_4 , ce qui correspond à $n = 4$) jusqu'à l'arrivée d'une impulsion de remise à zéro (RAZ). Celle-ci vient provoquer le retour à l'état d'origine des DT. Le sélecteur, fonctionnant en analyse d'amplitudes, classe alors, dans une mémoire, chaque V_f à une adresse bien déterminée.

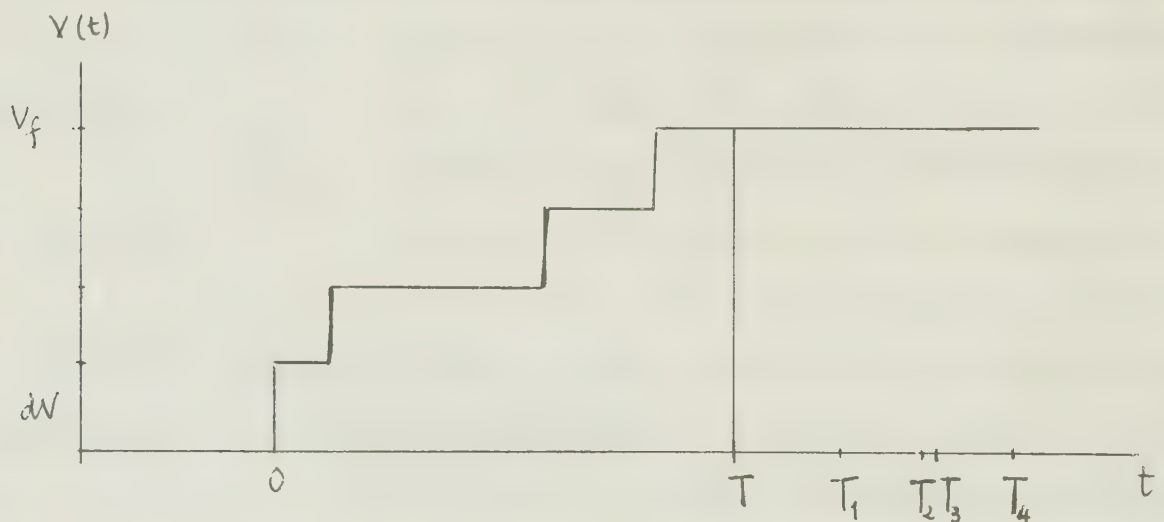
Nous obtenons ainsi un tracé automatique de la courbe cherchée : loi de probabilité $p(n, T)$ de n compté dans $(0, T)$.

La remise à zéro (RAZ) de l'échelle se fait après chaque mesure de n , par les impulsions de fin d'analyse du sélecteur : le cycle de répétition peut être de cette façon, assez élevé (de l'ordre de 100 kHz). Une mesure complète de $p(n, T)$ ($0 < n < 15$) se fait, pour un nombre total d'échantillons de l'ordre de 10^6 , en deux minutes. Il est clair que durant ce temps, aucun problème de stabilité d'appareil ne se pose.

Le signal de porte qui détermine le début de la durée de comptage et qui est délivré par le générateur 3 I, peut être obtenu par un fonctionnement relaxé ou déclenché du générateur

- relaxé : la loi obtenue est celle des $p(n, T)$
- déclenché par un photoélectron : nous aurons les $q(n, T)$
- déclenché par un photoélectron, puis retardé de θ ($100 \text{ ns} < \theta < 1 \text{ ms}$),

nous obtenons alors la loi des comptages "déclenchés retardés $q(n, T, \theta)$ ".



$(0, T)$ durée d'analyse par l'échelle	} fournies par le générateur 3.I.
(T_1, T_2) durée d'analyse par le sélecteur	
(T_3, T_4) RAZ, délivrée par le sélecteur	

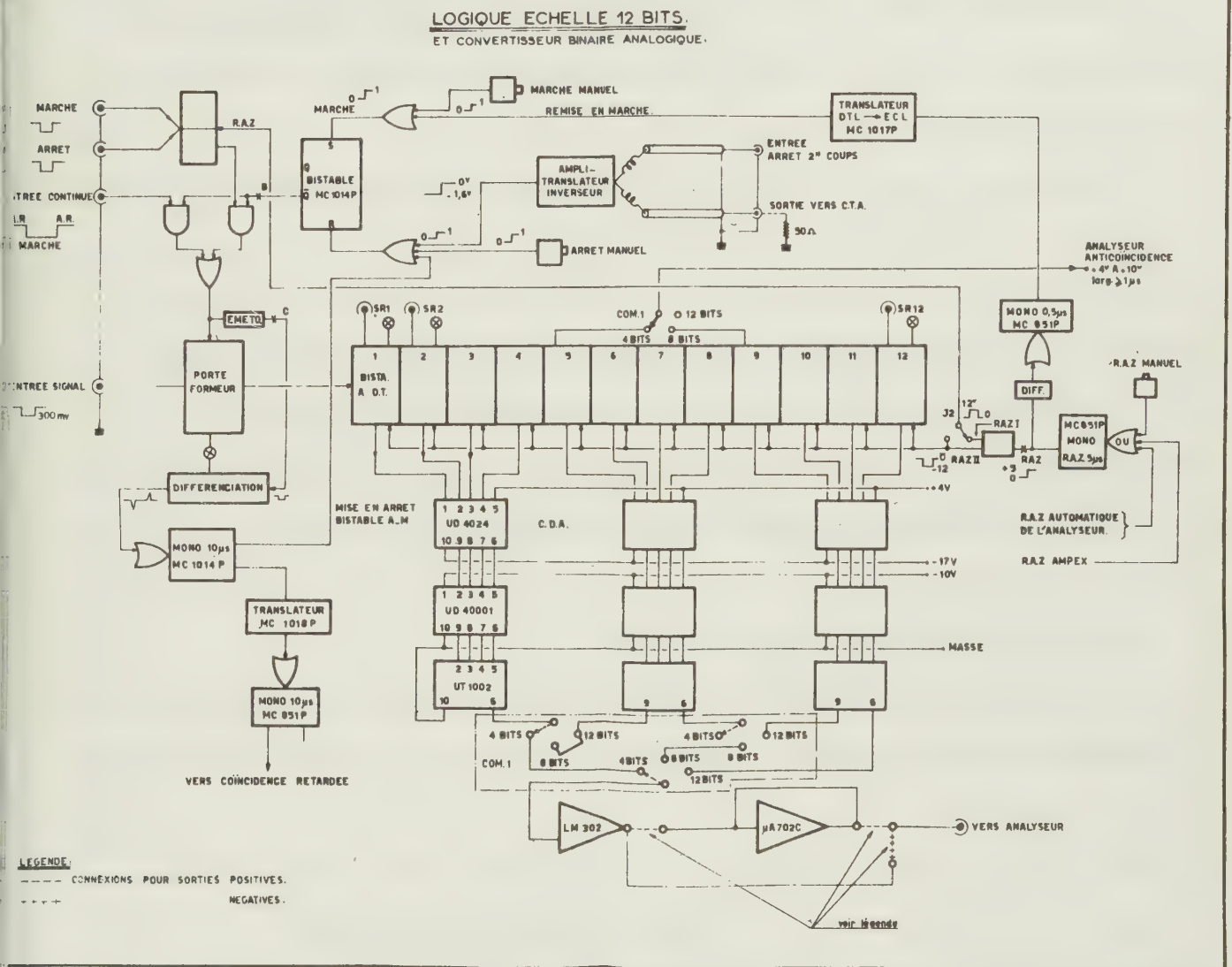


Schéma de principe de l'échelle.

II-2.c) Lois des intervalles de temps

Le montage expérimental est schématisé sur la figure 3.

Les impulsions mises en forme sont disponibles à la sortie du discriminateur sur deux voies parallèles.

A l'aide d'un convertisseur temps-amplitude (CTA) SAIP 7015 composé de 6 gammes couvrant l'intervalle de temps 100 ns-30 μ s, possédant une linéarité de 1% sur chaque gamme, et de résolution temporelle meilleure que la ns sur la dernière gamme, nous disposons à la sortie, d'impulsions d'amplitudes proportionnelles à l'écart en temps entre les impulsions déclenchant les voies "départ" et "arrêt".

On obtient la statistique des intervalles successifs (loi du temps de vie) en stockant ces impulsions dans la mémoire du sélecteur.

On peut également s'intéresser à la statistique des temps d'attente résiduelle. L'origine est alors arbitraire : la voie "départ" est attaquée par les impulsions très brèves d'un générateur à relai de mercure Tektronix type 109.

Dans toutes ces mesures d'intervalles simples, les temps morts sont négligeables et la durée de stockage est brève (de l'ordre de la minute).

II-2.d) Lois des intervalles multiples

Les impulsions mises en forme à la sortie du discriminateur sont dirigées sur l'échelle binaire précédemment décrite (§ 2.b) fonctionnant, dans ce cas, en permanence.

Les sorties des bistables de l'échelle (schéma fig. 5) sont constituées par les impulsions d'entrée classées par ordre d'arrivée à l'échelle.

Les impulsions de rang donné (rang déterminé par le numéro du bistable) sont de nouveau mises en forme dans un deuxième discriminateur dont la sortie est formée de deux voies parallèles pratiquement identiques.

Celles-ci attaquent les voies "départ" et "arrêt" du CTA fonctionnant de la même manière que pour les intervalles simples.

On voit donc qu'en sélectionnant le rang du bistable, nous choisissons le nombre d'intervalles additionnés. Dans ce cas, la densité initiale d'impulsions étant faible, la mesure d'un intervalle (formé de plusieurs sous-intervalles) peut être de durée assez longue (1 heure).

Néanmoins, le nombre total de sous-intervalles ne peut dépasser 63 car les densités exigées, pour un temps de stockage n'excédant pas l'heure, sont très élevées et nous n'avons pu les atteindre.

Le CTA, après chaque analyse, est bloqué et n'est remis en position de fonctionnement qu'à l'arrivée de l'impulsion fin de temps mort du sélecteur d'amplitude. Ainsi, nous avons pu corriger au mieux les déformations des courbes, inévitables lorsque les temps d'accumulation des données dans le sélecteur sont longs.

II-2.e) Fonction de corrélation des fluctuations d'intensité

Plusieurs méthodes expérimentales sont possibles pour mesurer la fonction de corrélation : corrélateur, circuit à coïncidence, conversion temps-amplitude, corrélation logique après écrêtage (méthode dite de "clipping"), mesure du moment factoriel d'ordre 2, méthode des comptages "déclenchés retardés".

Toutes ces méthodes seront décrites en détail dans le chapitre V ; nous montrons simplement ici, comment on peut expérimentalement utiliser certaines d'entre elles.

II-2.e1) A l'aide de deux détecteurs

Le dispositif est dérivé de celui utilisé par Hanbury Brown et Twiss et est représenté sur la fig. 6. L'évènement à enregistrer est la distance entre photoélectrons détectés par les P.M. 1 et 2. On y parvient en utilisant un CTA ; l'une des deux voies ("arrêt") est retardée par rapport à l'autre de façon à centrer le zéro au milieu de la gamme de conversion du CTA.

II-2.e2) A l'aide d'un seul détecteur

1) Méthode du CTA : A faible densité de photoélectrons, la loi du temps de vie est égale à la fonction de corrélation temporelle de l'intensité. On opère

donc comme ci-dessus en 2.c, mais avec une densité telle que $\exp(-X) = 1$, dans l'expression (I-40).

2) Méthode du moment factoriel d'ordre 2: On procède comme pour la mesure de $p(n, T)$ et la fonction de corrélation est déduite des mesures de :

$$(II-1) \quad - \quad \langle n^{[2]} \rangle = \sum_n n(n-1) p(n, T)$$

faites pour plusieurs valeurs de T : la relation existant entre $\langle n^{[2]} \rangle$ et $\gamma_I(\theta)$ sera établie dans le chapitre V.

3) Méthode des comptages déclenchés relaxés : On enregistre $q(n, T, \theta)$ suivant la méthode indiquée ci-dessus en 2.b) et on considère $q(n, T, \theta)$ comme fonction de θ seul (n_0 et T_0 fixés). On établira plus loin dans le chapitre V, consacré à la mesure de la fonction de corrélation et dans plusieurs cas expérimentaux possibles (champ pseudo-thermique, champ gaussien réel, ...) les relations liant $\gamma_I(\theta)$ à $q(n_0, T_0, \theta)$.

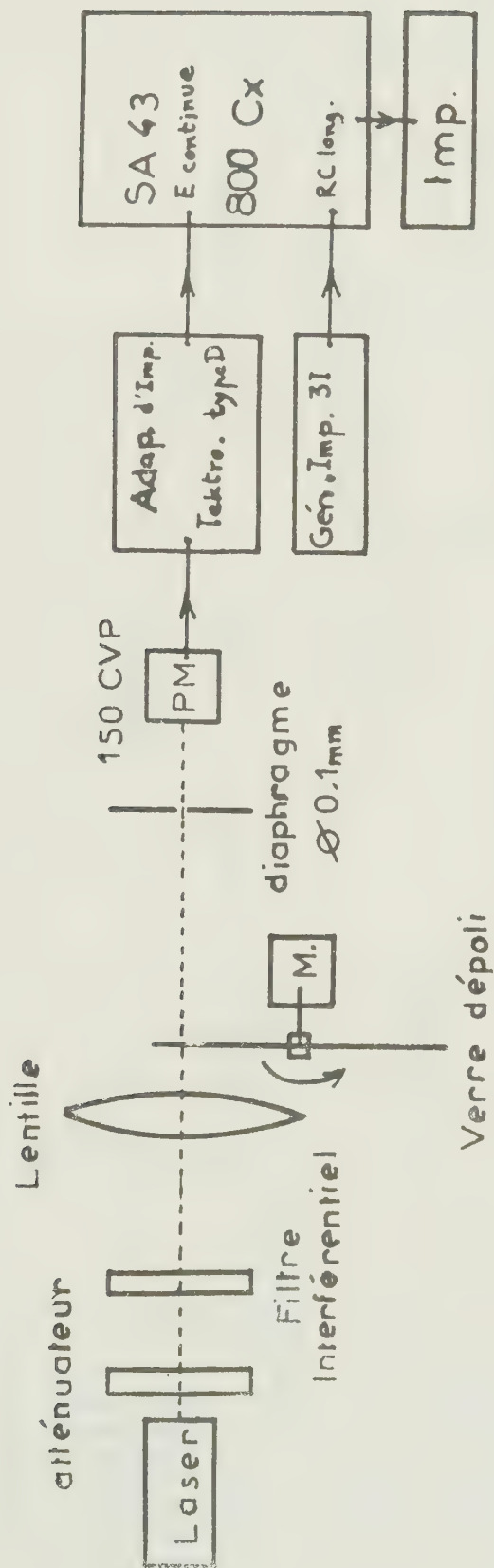


Fig. 1

Echantillonnage de l'intensité : mesure de $p(i)$

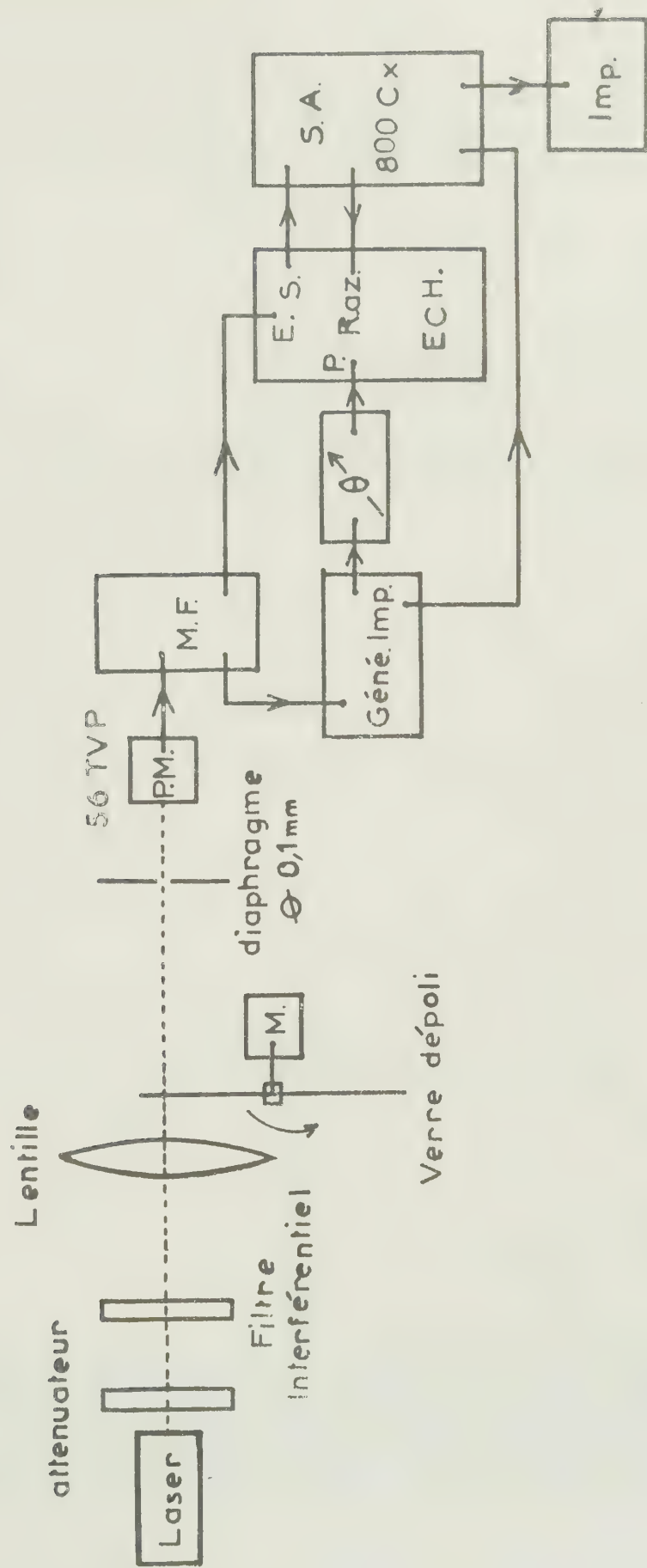


Fig. 2

Comptage de photons : $p(n,T)$ et $\alpha(n;T,\theta)$

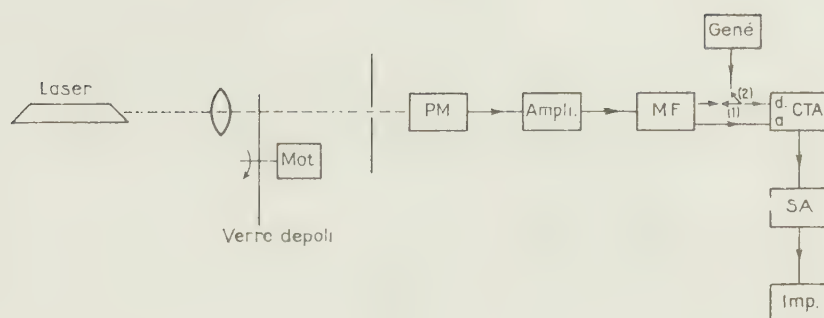


Fig. 3 — Schéma du montage expérimental.

Position (1) : mesure de $W(o|t)$;

" (2) : " de $W(t)$.

PM : photomultiplicateur; MF : mise en forme d'impulsions; Gén : Générateur d'impulsions très brèves; CTA : convertisseur temps-amplitude (d. : départ; a : arrêt); SA : sélecteur d'amplitudes; Imp : imprimante.

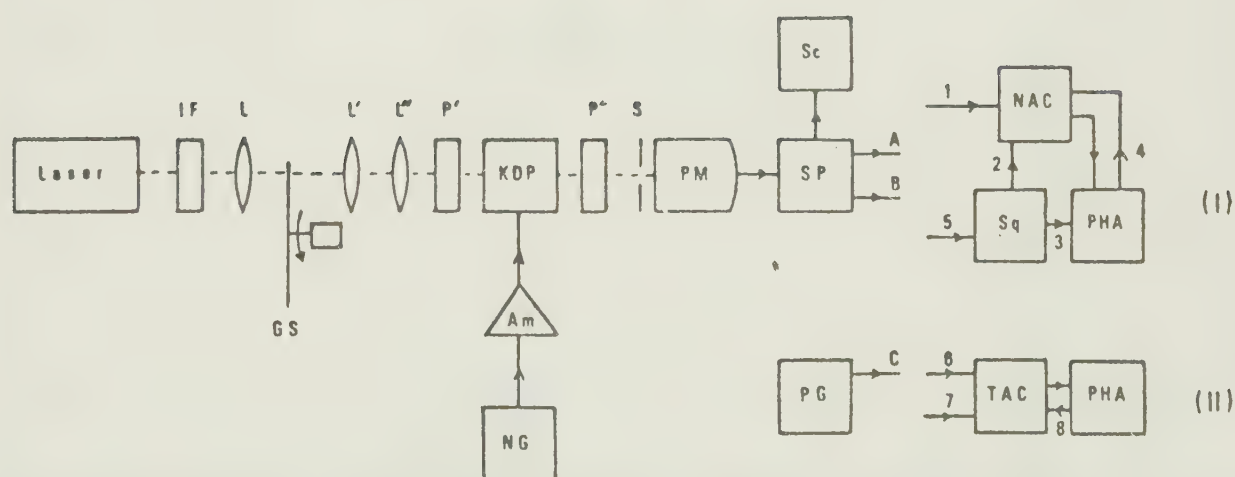


FIG. 4. Apparatus used to measure (I) photoelectric-counting distribution; A-1 relaxed distribution $p_T(n)$; A-1 and B-5 triggered distribution $q_T(n)$; (II) time-intervals distribution; A-6 and B-7 lifetime distribution $w(0|t)$; C-5 and B-7 residual waiting-time distribution $w(t)$. Symbols: IF—interference filter, L—focusing lens, GS—ground-glass screen, L' L''—inverted telescope, P' P''—crossed polarized, Am—low-frequency amplifier, NG—noise generator, S—slit, PM—multiplier phototube, SP—standard-pulse former, Sc—scaler, Sq—sequencer, NAC—pulse number to amplitude converter 1 read, 2 gate width T , 3 delayed gate, 4 reset, 5 external triggering, PHA—pulse-height analyzer 800 channels, TAC—time to amplitude converter 6 start, 7 stop, 8 reset, PG—pulse generator.

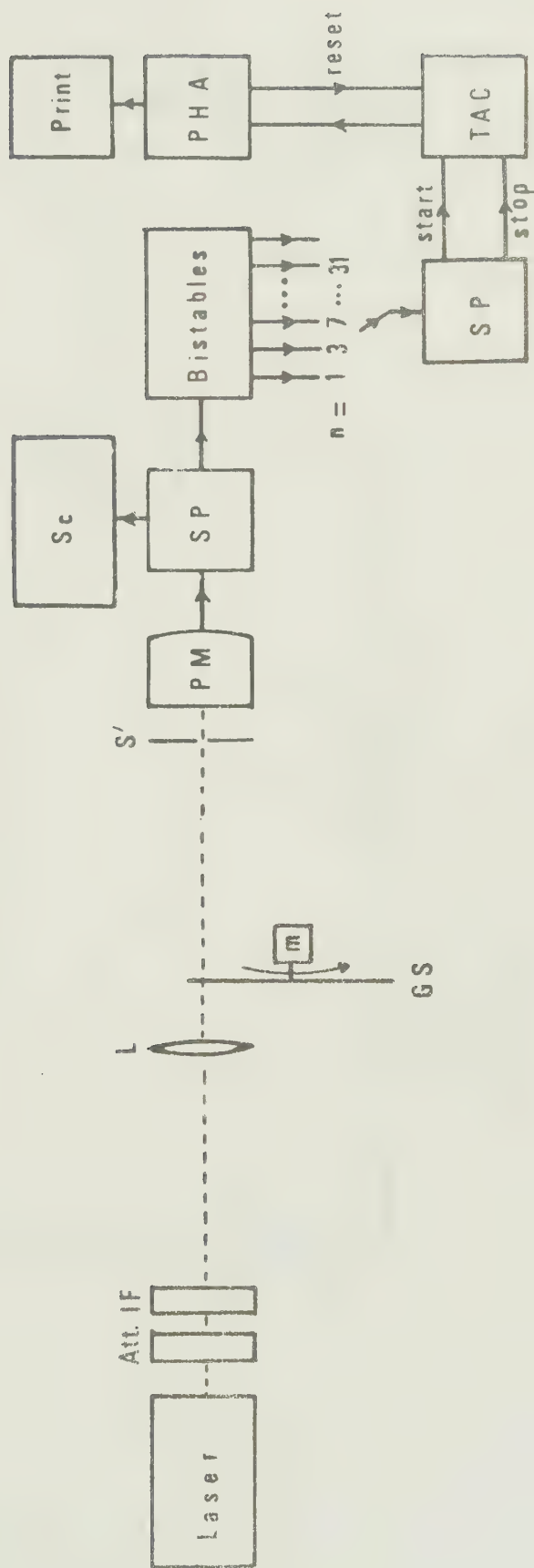


Fig. 5 - Intervals multiples $W_n(o/t)$

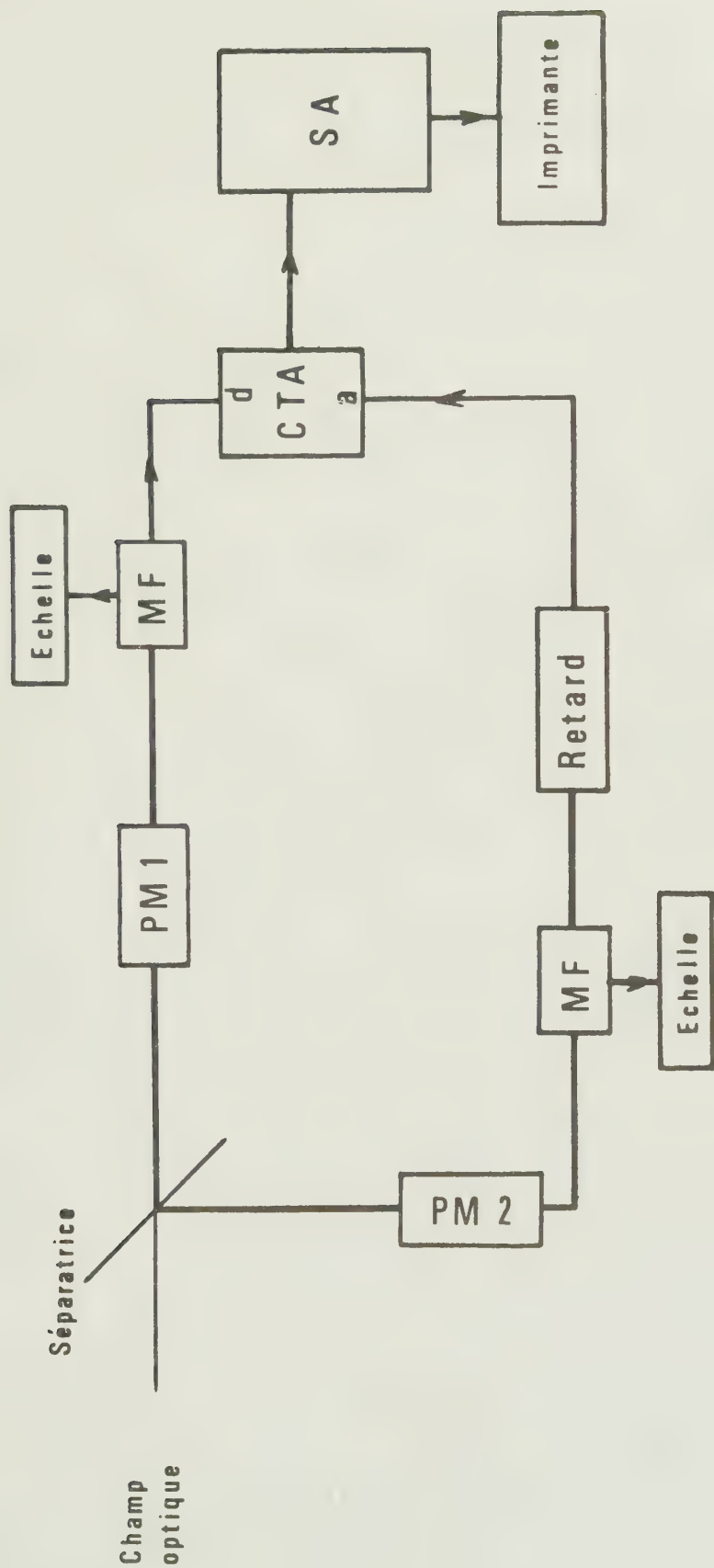


FIG. 6

Fonction de corrélation des fluctuations d'intensité : méthode à deux détecteurs

CHAPITRE III

Champ thermique

Le champ thermique a déjà été présenté pour ses principales propriétés, dans le premier chapitre.

On rappelle qu'on désigne par champ thermique tout champ décrit par une fonction aléatoire scalaire, réelle, quasi-monochromatique, stationnaire et Gaussienne. C'est par exemple, le champ émis par un ensemble d'atomes en équilibre thermique, de spectre optique quelconque.

L'intérêt de la loi de Gauss se situe dans le fait qu'elle s'introduit tout naturellement en Physique Statistique par des applications du théorème de la limite centrale, et qu'elle décrit très convenablement nombre de lois statistiques rencontrées dans l'étude des sources naturelles d'émission spontanée. De plus, et comme nous l'avons vu au cours du Chapitre I, les moments du second ordre du champ Gaussien, aisément mesurables, sont suffisants pour exprimer les moments d'ordre quelconque, et cette propriété facilite grandement l'interprétation des résultats d'expériences.

Cependant, la plupart des sources actuellement connues sont de spectre optique très large et il est difficile d'analyser leurs fluctuations d'intensité car elles sont intégrées par les appareils de détection.

Dès lors, la réalisation de la source "pseudo-thermique", dont il sera question dans ce chapitre et qui possède les caractéristiques d'une source thermique avec spectre étroit, revêt une importance considérable.

C'est pourquoi, nous commencerons par récapituler les résultats théoriques essentiels relatifs au champ thermique en insistant sur les simplifications introduites par le caractère Gaussien du champ, avant de passer à l'étude proprement dite de la source pseudo-thermique.

III-1. Rappels théoriques

III-1.a) Temps de mesure très petit devant le temps de cohérence

Pour les champs optiques décrits par les modèles simples du Chapitre I, et pour lesquels le temps de cohérence est grand devant toutes les valeurs des temps intervenant dans les grandeurs que nous nous proposons de mesurer, les expressions exactes de toutes les lois de probabilité définies dans le Chapitre I sont facilement calculables.

Dans le cas du laser monomode stabilisé en amplitude, l'intensité est constante et le processus ponctuel des $\{t_i\}$ est évidemment un processus de Poisson pur. Les formules essentielles s'écrivent :

$$(III-1) \quad p(n, T) = q(n, T) = q(n; T, \theta) = e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!}$$

$$(III-2) \quad W(0|t) = w(t) = \langle I \rangle e^{-\langle I \rangle t}$$

$$(III-3) \quad W_n(0|t) = \langle I \rangle \frac{\langle I \rangle^n t^n}{n!} e^{-\langle I \rangle t}$$

Dans le cas d'un champ thermique décrit par une fonction aléatoire réelle, stationnaire et Gaussienne, le processus des $\{t_i\}$ est alors un processus de Poisson composé ⁽⁴⁴⁾ ; l'intensité instantanée admet pour loi de probabilité :

$$(III-4) \quad p(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} e^{-\frac{I}{\langle I \rangle}}$$

et les équations (I-35) à (I-43) se développent simplement.

Calculons d'abord la fonction génératrice $Q(s)$ à partir de sa définition (I-44)

$$(III-5) \quad Q(s, T) = \frac{1}{\langle I \rangle} \int_0^\infty e^{-sIT} e^{-\frac{I}{\langle I \rangle}} dI = (1 + s \langle n \rangle)^{-1}$$

où $\langle n \rangle = \langle I \rangle T$ est la valeur moyenne du nombre de photoélectrons comptés dans $(0, T)$.

Le calcul des lois des comptages s'obtient à partir des relations (I-35) et (I-43) ou à partir des dérivées d'ordre n de (III-5). L'une et l'autre méthodes conduisent à :

$$(III-6) \quad p(n, T) = \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}}$$

$$(III-7) \quad q(n, T) = \frac{n+1}{\langle n \rangle} p(n+1, T) = (n+1) \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+2}}$$

Le moment factoriel d'ordre k se déduit de (I-52)

$$F_k = \langle n [k] \rangle = k! \langle n \rangle^k$$

Pour les lois d'intervalles, on opère de même, à partir des équations (I-40) et (I-41)

$$(III-8) \quad w(c|t) = \frac{2 \langle I \rangle}{(1 + \langle I \rangle t)^3}$$

$$(III-9) \quad w(t) = \langle I \rangle (1 + \langle I \rangle t)^{-2}$$

et pour les intervalles multiples

$$(III-10) \quad W_n(c|t) = (n+1)(n+2) t^n \langle I \rangle^{n+1} (1 + \langle I \rangle t)^{-(n+3)}$$

Ces formules forment l'essentiel des relations à une dimension nécessaires à la vérification expérimentale, objet du paragraphe suivant de ce chapitre.

Intéressons-nous, maintenant, aux lois bi-dimensionnelles et tout d'abord à l'expression de $Q(s_1, s_2)$

$$(III-11) \quad Q(s_1, s_2) = \langle e^{-(s_1 I_1 T_1 + s_2 I_2 T_2)} \rangle$$

T_1 et T_2 restent très inférieurs à τ_c , mais le temps θ de séparation entre les débuts de chaque comptage, est quelconque.

Posons

$$(III-12) \quad I_1 = |Z_1|^2$$

où Z_1 et Z_2 sont les signaux analytiques corrélés associés aux champs optiques d'intensité I_1 et I_2 .

$Q(s_1, s_2)$ s'écrit de nouveau sous la forme

$$(III-13) \quad Q(s_1, s_2) = \langle e^{-(s_1 T_1 |Z_1|^2 + s_2 T_2 |Z_2|^2)} \rangle$$

Pour calculer l'expression (III-13), il faut tout d'abord remarquer que Z_1 et Z_2 sont des fonctions complexes, donc à deux dimensions. Le calcul de (III-13) fera donc intervenir les densités de probabilité (d.d.p.) de Z_1 , Z_2 et du couple (Z_1, Z_2) , densités à 2, 2 et 4 dimensions respectivement. En toute généralité, la matrice de covariance $\langle Z_1, Z_2 \rangle$ sera une matrice 4 X 4. Cependant, grâce aux propriétés de signal analytique et gaussienne de Z_1 , la d.d.p. de (Z_1, Z_2) que nous noterons $p(Z_1, Z_2)$ se simplifie et s'écrit de manière condensée uniquement à l'aide de Z_1 et Z_2 (cf. Davenport et Root, Réf. (15) p. 162).

$$(III-14) \quad p(Z_1, Z_2) = \frac{1}{4\pi^2 \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle (1 - |\gamma_Z(\theta)|^2)} \exp \left(\frac{-|Z_1|^2 - |Z_2|^2 - 2 \operatorname{Re} Z_1 Z_2^* |\gamma_Z(\theta)|^2}{2 \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle (1 - |\gamma_Z(\theta)|^2)} \right)$$

où $\gamma_Z(\theta)$ est la fonction de corrélation normalisée du champ Gaussien complexe stationnaire, $\langle n_1 \rangle$ et $\langle n_2 \rangle$ sont des valeurs moyennes $\langle |Z_1|^2 \rangle = T_1$, $\langle |Z_2|^2 \rangle = T_2$ du nombre de photoélectrons comptés respectivement dans $(0, T_1)$ et $(\theta, \theta + T_2)$.

On peut écrire alors

$$(III-15) \quad Q(s_1, s_2) = \iiint e^{-(s_1 T_1 |Z_1|^2 + s_2 T_2 |Z_2|^2)} p(Z_1, Z_2) d^2 Z_1 d^2 Z_2$$

L'écriture symbolique $d^2 Z_1$ signifiant :

$$d^2 Z_1 = d [\operatorname{Re}(Z_1)] d [\operatorname{Im}(Z_1)]$$

Portons (III-14) dans (III-15).

Effectuant les intégrales par passage en coordonnées polaires, on obtient pour résultat final :

$$(III-16) \quad Q(s_1, s_2) = \left[1 + \langle n_1 \rangle s_1 + \langle n_2 \rangle s_2 + s_1 s_2 \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle (1 - |\gamma_2(0)|^2) \right]^{-1}$$

Cette forme très simple de $Q(s_1, s_2)$ peut encore être particularisée en supposant $\langle n_1 \rangle = \langle n_2 \rangle = \langle n \rangle$.

Le calcul de $p(n_1, T_1; n_2, T_2)$ à partir des dérivées d'ordre n_1 et n_2 par rapport à S_1 et S_2 , comme indiqué en (I-57) aboutit à :

$$(III-17) \quad p(n_1, T_1; n_2, T_2) = \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!} \frac{(\langle n \rangle B)^{n_1 + n_2}}{A^{n_1 + n_2 + 1}} {}_2F_1(-n_1, -n_2; -(n_1 + n_2); C)$$

où

$$A = 1 + 2 \langle n \rangle + \langle n \rangle^2 (1 - |\gamma_Z(\theta)|^2)$$

$$B = 1 + \langle n \rangle (1 - |\gamma_Z(\theta)|^2)$$

$$C = (1 - |\gamma_Z(\theta)|^2) \cdot A \cdot B^{-2}$$

${}_2F_1$ est la fonction hypergéométrique de Gauss ⁽⁵⁸⁾ définie sous la forme de série (cf. Whittaker et Watson, Réf. 58, chapitre 14).

Nous vérifions, tout d'abord, à la limite $\theta \rightarrow \infty$, que $p(n_1, n_2) = p(n_1) p(n_2)$.

Retenons ensuite quelques formes particulières de (III-17)

$$(III-18) \quad p(0, 0) = \left[1 + 2 \langle n \rangle + \langle n \rangle^2 (1 - |\gamma_2|^2) \right]^{-1}$$

formule qui suggère une méthode de mesure de $\gamma_Z(\theta)$ ⁽²¹⁾

D'autre part :

$$p(0, n) = \langle n \rangle^n B^n A^{-(n+1)}$$

Soit pour $\langle n \rangle \ll 1$

$$(III-19) \quad p(0, n) \propto \langle n \rangle^n \left[1 + 2 \langle n \rangle (n+1) + n \langle n \rangle (1 - |\gamma_2(\theta)|^2) \right]$$

Enfin, toujours dans le cas $\langle n \rangle \ll 1$, nous avons :

$$(III-20) \quad p(1, n) \approx (n+1) \frac{\langle n \rangle^{n+1}}{(1+2\langle n \rangle)^{n+2}} \left[1 + \langle n \rangle (1 - |\gamma_2(\theta)|^2) \right]^{n+1} {}_2F_1(-1, -n; -(n+1), \dots)$$

Remarquons que ces résultats de comptages doubles se présentent sous une écriture compliquée et d'utilisation peu aisée.

De plus, la loi $p(n_1, n_2)$ est en général assez difficile à déterminer expérimentalement.

C'est pourquoi nous lui substituons avantageusement la loi appelée loi des comptages "déclenchés retardés" et qui est la loi de $q(n; T, \theta)$ probabilité de trouver n points dans l'intervalle $(t, t+T)$ ($T \ll \tau_c$) conditionnée par la détection d'un point en $t-\theta$. Le calcul de $q(n; T, \theta)$ s'obtient à partir de $p(n_1, n_2)$ dans laquelle $n_1 = 1$, $T_1 \rightarrow 0$ de sorte que

$$(III-21) \quad q(n; T, \theta) = \lim_{T_1 \rightarrow 0} \frac{p(1, T_1; n, T)}{p(1, T_1)}$$

où $p(1, 0; n, T)$ désigne la probabilité de détecter n photoélectrons dans $(\theta, \theta+T)$ avec pour condition la détection d'un photoélectron à l'origine. La probabilité de réaliser cette condition étant $p_0(1)$.

On trouve

$$(III-22) \quad q(n, T, \theta) = \frac{\langle n \rangle^n}{(1+\langle n \rangle)^{n+1}} \left[1 + \frac{n - \langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} |\gamma_2(\theta)|^2 \right]$$

Notons que (III-22) est très différent que $p(1, n)$ écrite en (III-20).

Notons également que (III-22) constitue une nouvelle méthode de mesure de $\gamma_2(\theta)$, méthode que nous exploiterons dans le Chapitre 5.

Enfin, montrons deux propriétés utiles de cette loi des $q(n; T, \theta)$

1°) Aux limites :

$$(III-23) \quad \theta \rightarrow 0 \quad q(n; T, 0) = \frac{n+1}{\langle n \rangle} p(n+1, T)$$

$$(III-24) \quad \theta \rightarrow \infty \quad q(n; T, \infty) = p(n, T)$$

2°) Calculons les moments factoriels d'ordre k déduits de l'expression des $q(n; T, \theta)$ et comparons-les à ceux calculés à partir des $p(n, T)$.

$$(III-25) \quad \langle n^{[k]} \rangle_q = \left(1 + \frac{k - \langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} |\gamma_2(\theta)|^2 \right) \langle n^{[k]} \rangle_p + \frac{|\gamma_2(\theta)|^2}{1 + \langle n \rangle} \langle n^{[k+1]} \rangle_p$$

avec

$$(III-26) \quad \langle n^{[k]} \rangle_p = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) p(n, T) = k! \langle n \rangle^k$$

d'où

$$(III-27) \quad \langle n^{[k]} \rangle_q = k! \left(1 + \frac{k - \langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} |\gamma_2(\theta)|^2 \right) \langle n \rangle^k + (k+1)! \frac{|\gamma_2(\theta)|^2}{1 + \langle n \rangle} \langle n \rangle^{k+1}$$

L'expression se simplifie pour une valeur particulière de k . En effet, pour $k = \langle n \rangle$, on trouve :

$$(III-28) \quad \langle n^{[k]} \rangle_q = \langle n^{[k]} \rangle_p (1 + \langle n \rangle |\gamma_2(\theta)|^2)$$

relation qui montre que les deux lois $p(n)$ et $q(n)$ n'ont de moments identiques que lorsque $\gamma_2(\theta) \approx 0$.

III-1.b) Temps de mesure quelconque

Considérons maintenant le cas où le temps de mesure T (ou t) est quelconque devant le temps de corrélation τ_c : les relations ci-dessus développées ne sont plus valables et les calculs de $Q(s, T)$, $p(n, T)$, $w(o | t)$... deviennent difficiles à effectuer.

Cependant, le caractère Gaussien du champ permet de pousser, formellement tout au moins, le calcul et de le terminer dans le cas particulier d'un champ Gaussien à spectre Lorentzien.

Indiquons brièvement l'origine de la simplification apportée par la propriété Gaussienne du champ complexe $Z(t)$.

Utilisons le développement de Karhunen-Loeve ⁽¹⁵⁾ de $Z(t)$ (non périodique du temps) valable sur l'intervalle $(0, T)$

$$(III-29) \quad Z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k(t)$$

k étant un entier et les ψ_k des fonctions du temps formant une base orthonormée, $\int_0^T \psi_k(t) \psi_{k'}^*(t) dt = \delta_{kk'}$, solutions de l'équation intégrale

$$(III-30) \quad \lambda_k \psi_k(t) = \int_0^T \gamma(t-t') \psi_k(t') dt' \quad (0 \leq t \leq T)$$

$\gamma(t-t')$ est la fonction de corrélation normalisée du champ $Z(t)$ et λ_k les valeurs propres de (III-30).

Les coefficients c_k sont des variables non corrélées qui définissent les λ_k vérifiant les conditions liées aux caractères signal analytique et Gaussien de $Z(t)$:

$$(III-31) \quad \langle c_k^* c_{k'} \rangle = \lambda_k \delta_{kk'} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \delta_{kk'} &= 1 \text{ pour } k = k' \\ \delta_{kk'} &= 0 \text{ pour } k \neq k' \end{aligned}$$

De plus, comme $Z(t)$ est Gaussien, nous avons : $\langle c_k c_k \rangle = 0$ et

$$(III-32) \quad p(\{c_k\}) = \prod_k \frac{1}{\pi \lambda_k} e^{-\frac{|c_k|^2}{\lambda_k}}$$

Nous nous limiterons, à cause de la complexité du problème, à l'étude des lois unidimensionnelles et commencerons par calculer la fonction génératrice $Q(s)$.

$$(III-33) \quad Q(s, T) = \int e^{-s \sum_j |c_j|^2} \prod_k \frac{1}{\pi \lambda_k} e^{-\frac{|c_k|^2}{\lambda_k}} d^2 c_k = \prod_k (1 + I_j s \lambda_k)^{-1}$$

sachant que $Q(s, T) = \langle e^{-s I(T)} \rangle$ avec

$$(III-34) \quad I(T) = \int_0^T Z(t') Z^*(t') dt' = \sum_j |c_j|^2$$

Pour achever algébriquement le calcul de $Q(s)$, il faut déterminer les λ_k , valeurs propres de (III-30).

Un des cas où ceci est possible rigoureusement a lieu lorsque le noyau γ est du type exponentiel :

$$(III-35) \quad \gamma(t-t') = \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_c}\right)$$

(III-30) se ramène à une équation différentielle du second ordre

$$(III-36) \quad \lambda_k \psi_k''(t) + \frac{2}{\tau_c} \psi_k'(t) = -\frac{\lambda_k}{\tau_c^2} \psi_k(t)$$

On connaît alors les ψ_k . λ_k . Seuls les λ_k interviennent dans $Q(s)$ et s'écrivent

$$\lambda_k = \langle I \rangle \frac{T^2}{\tau_c^2} \left(\frac{T^2}{\tau_c^2} + \chi_k^2 \right)$$

où les χ_k sont les racines positives de l'une ou de l'autre des équations

$$2 \chi \operatorname{tg} \chi = \frac{T}{\tau_c}$$

$$2 \chi \operatorname{cotg} \chi = -\frac{T}{\tau_c}$$

d'où la valeur de $Q(s)$

$$(III-37) \quad Q(s) = e^{\frac{T}{\tau_c}} \left\{ \operatorname{ch} z + \left(\frac{T}{2z\tau_c} + \frac{z\tau_c}{2T} \right) \operatorname{sh} z \right\}^{-1}$$

avec

$$(III-38) \quad z = T \left(\frac{1}{\tau_c^2} + 2 \langle I \rangle s \tau_c \right)^{1/2}$$

A l'aide de $Q(s)$, on peut calculer à présent $p(i)$ (28) et $p(n)$ (22)

D'autre part, à partir de $Q(s)$ on établit des résultats asymptotiques intéressants pour T (ou t) $> \tau_c$ (28).

Cependant, lorsque la fonction de cohérence du champ n'est pas une fonction exponentielle ou la transformée de Fourier d'un spectre rationnel de degré pair, l'équation (III-30) ne s'écrit plus sous la forme (III-36) et nous ne possédons pas de méthode algébrique pour sa résolution. C'est en parti-

culier le cas, pour une forme Gaussienne de $\gamma(\tau)$, que nous étudierons numériquement au cours du chapitre VI.

III-2. Réalisation d'un champ thermique

III-2.a) Généralités

Dans la théorie classique de l'émission, on assimile toute source lumineuse naturelle assez étendue et de flux intense, à une collection d'oscillateurs classiques amortis ; les instants de départs des émissions élémentaires et les phases à l'origine étant aléatoires.

De plus, les oscillateurs étant indépendants, en nombre important et apportant une contribution de même ordre à l'émission résultante, on voit que la variable lumineuse (champ électrique par exemple) obéit pratiquement à une loi de Gauss.

Cependant, ce modèle, s'il n'est pas contredit par les expériences, n'a pu recevoir de vérification expérimentale directe, le temps de cohérence de cette lumière étant trop court pour nos moyens actuels en électronique rapide. En effet, si l'on se propose, par exemple, de faire des expériences d'échantillonnage d'intensité par la méthode du sélecteur multicanaux ⁽¹¹⁾ sur les fluctuations d'intensité de la lumière du Hg¹⁹⁸ (temps de cohérence $\tau_c \ll 10^{-9}$ s) ⁽⁵³⁾, le temps d'échantillonnage devra être au minimum de l'ordre de $\frac{\tau_c}{100} \sim 10^{-11}$ s, ce qui est délicat à réaliser.

L'avènement du laser a rendu possible la création de sources pratiquement thermiques possédant des temps de cohérence très grands.

Si l'on suppose qu'un laser monomode n'a aucune fluctuation, il engendre le champ parfaitement sinusoïdal $e^{i\omega_0 t}$. Par diffusion sur différents milieux aléatoires, on peut obtenir dans une direction donnée le champ $z(t) e^{i\omega_0 t}$ où $z(t)$ est l'amplitude complexe dont les fluctuations décrivent le phénomène de diffusion. Dans de nombreux cas, on peut justifier que $z(t)$ est Gaussienne, ce qui permet ainsi d'obtenir un champ thermique avec temps de corrélation lié aux fluctuations du milieu, et en général facilement mesurables.

Il faut toutefois noter que dans le cas du laser réel, il y a des fluctuations de phase de sorte que le champ diffusé devient $U(t) = z(t) e^{i(\omega_0 t + \alpha(t))}$.

Ainsi même si $z(t)$ est Gaussienne, $U(t)$ ne l'est pas. Toutefois, toutes

les lois de probabilités liées à l'amplitude complexe $z(t)$ restent les mêmes.

C'est en utilisant ces principes que Martienssen et Spiller⁽³⁵⁾ ont eu l'idée de faire diffuser un faisceau laser monomode par un verre dépoli tournant.

Faisons une analyse théorique simple permettant de comprendre l'introduction de la loi de Gauss: Nous présentons un calcul de la loi de probabilité du champ diffusé par un verre dépoli, s'appuyant sur un modèle qui considère le champ résultant de la diffusion comme la somme d'un très grand nombre de champs élémentaires d'égales amplitudes, indépendants, et de phase aléatoires.

La méthode de calcul est due à Rayleigh⁽⁵⁰⁾ qui l'a utilisée dans le cas de superposition aléatoire d'ondes acoustiques. Elle décrit la loi à une dimension à laquelle obéit le champ $Z(t)$. Une autre approche, utilisant des méthodes d'analyse harmonique et reprenant divers résultats de B. Picinbono a été également présentée par M. Rousseau dans un travail récent⁽⁴⁵⁾ en vue de l'étude de l'ensemble des moments du champ.

III-2.b) Analyse théorique

L'analyse théorique que nous formulons n'a pas pour objectif de démontrer rigoureusement que le champ complexe $Z(t)$ de la source pseudo-thermique est Gaussien. Ceci est très compliqué et impliquerait, en effet, d'une part, le calcul de Γ^{2k} (équation I-5) moment pair d'ordre quelconque de $Z(t)$ et d'autre part, exigerait que l'on montre que Γ^{2k} s'écrit sous forme d'une somme de produits des moments du second ordre $\langle Z Z^* \rangle$.

Nous nous proposons seulement ici, de détailler un calcul à une dimension de la loi de probabilité de Z et de signaler les hypothèses conduisant à la loi de Gauss.

Le calcul du moment d'ordre 2 (ou fonction de corrélation) de Z est réservé au chapitre V qui traite spécialement des fonctions de corrélation des fluctuations de divers types de champs lumineux.

Nous considérons donc la surface S du verre dépoli éclairée par un laser d'intensité constante, et les N centres diffusants qui y sont contenus. Ces centres sont supposés spatialement indépendants et au point de détection M, situé très loin du verre, nous détectons un champ $Z(t)$ formé de N champs élémentaires que nous admettons d'égales amplitudes mais de phase ϕ_k indépendantes équiparties entre 0 et 2π .

Intéressons-nous à la partie réelle $X(t)$ de $Z(t)$. Notons que nous ne faisons pas intervenir ici la phase α_0 du champ laser incident. Cette phase α_0 dont les fluctuations sont très différentes de celles qui caractérisent la lumière thermique, n'est pas modifiée lors de la diffusion par le verre dépoli, et vient seulement s'ajouter à ϕ_k .

Avec nos hypothèses, nous pouvons écrire

$$(III-39) \quad X(t) = \sum_{k=1}^N x_k \cos(\omega_k t + \phi_k) = \sum_{k=1}^N x_k \cos \psi_k = \sum_{k=1}^N u_k$$

où ω_k est la pulsation du champ incident, que nous supposons rester constante au cours de la diffusion.

Ecrivons la fonction caractéristique $\varphi_x(z)$ de $X(t)$

$$(III-40) \quad \varphi_x(z) = \langle e^{izX} \rangle = \langle e^{iz \sum_k u_k} \rangle = \prod_k \langle e^{iz u_k} \rangle = \prod_k \varphi_k(z)$$

Nous avons d'autre part

$$(III-41) \quad p(\psi_k) d\psi_k = \frac{d\psi_k}{2\pi}$$

D'où

$$(III-42) \quad \varphi_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz x_k \cos \psi_k} d\psi_k = J_0(x_k z)$$

$J_0(x)$ est la fonction de Bessel d'ordre 0 et de première espèce.

De sorte que

$$(III-43) \quad \varphi_x(z) = \prod_{k=1}^N J_0(x_k z)$$

Utilisons le fait que $X_k = X_0$; il vient :

$$(III-44) \quad \varphi_x(z) = J_0^N(X_0 z)$$

La fonction caractéristique nous permet d'obtenir $p(x)$

$$(III-45) \quad p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} \varphi_x(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} J_0^N(X_0 z) dz$$

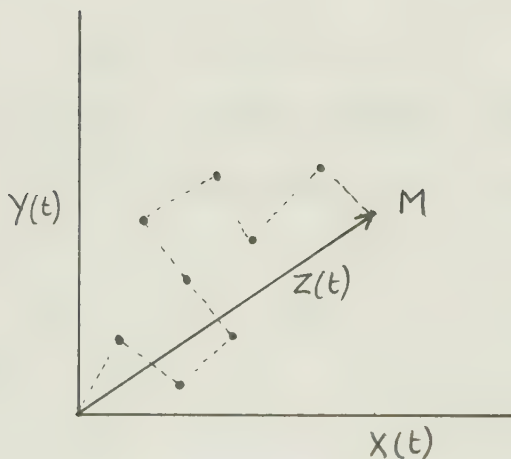
Faisons à présent tendre N vers ∞ :

$$(III-46) \quad J_0^N(X_0 z) = \left(1 + \frac{X_0^2 z^2}{4} + \frac{1}{16} \left(\frac{X_0^2 z^2}{2}\right)^2 + \dots\right)^N \approx e^{-\frac{NX_0^2}{4} z^2}$$

Soit pour

$$(III-47) \quad p(x) = \frac{1}{X_0 \sqrt{\pi N}} e^{-\frac{x^2}{2N X_0^2}}$$

qui est la distribution de Gauss centrée à l'origine et de variance $X_0^2 N$.



Connaissant $p(x)$, calculons $p(i)$ loi de probabilité de l'intensité $I(t)$

$$I(t) = |Z(t)|^2 = X^2(t) + Y^2(t)$$

$Y(t)$ étant indépendant et de même loi que $X(t)$. On obtient aisément pour $p(i)$ la loi exponentielle déjà signalée par l'expression (III-4).

L'étude simplifiée que nous venons de faire se limite au cas où les fluctuations du champ sont lentes ; la relation (III-27) est alors suffisante pour décrire toutes les propriétés de comptages et de lois d'intervalles.

Les expressions (III-1) à (III-10) constituent dès lors, avec (III-20) l'essen-

tiel des résultats théoriques, obtenus à $T \ll \tau_c$, que nous nous proposons de vérifier expérimentalement.

Nous développerons dans le chapitre VI, quelques résultats relatifs à T quelconque.

III-2.c) Résultats expérimentaux

A l'aide de l'appareillage expérimental décrit dans le chapitre II, nous avons réalisé des expériences de statistique de photoélectrons.

Nous avons tout d'abord vérifié la forme exponentielle de la loi de probabilité de l'intensité (fig. 1b) et contrôlé durant le même temps la stabilité de l'amplitude du laser (fig. 1a).

Le laser utilisé est un laser à gaz He-Ne Spectra Physics model 119 fonctionnant très au-dessus du seuil d'accrochage et fonctionnant le plus souvent en mode unique. Le tube est stabilisé en température et le faisceau émergent est faiblement divergent. La polarisation du faisceau peut être considérée comme totale. Un filtre interférentiel réduit la bande passante du spectre optique à $50 \text{ \AA}$ autour de $6328 \text{ \AA}$. Des atténuateurs neutres peuvent être introduits pour une étude à faible flux.

La source pseudo-thermique est obtenue en faisant diffuser la lumière du laser par un verre dépoli tournant. Le diamètre moyen des grains est d'environ 1μ . Afin de réduire le nombre de grains contenus dans la surface éclairée, nous avons focalisé le faisceau laser à l'aide d'une lentille convergente de courte distance focale ($2 \text{ cm} < f < 10 \text{ cm}$). Ainsi que nous le verrons plus loin, l'introduction de cette lentille modifie le temps de cohérence du champ diffusé qui est également réglable avec la vitesse de rotation du disque. Expérimentalement nous avons pu obtenir divers τ_c ($1 \mu\text{s} < \tau_c < 200 \text{ s}$).

Plaçant notre détecteur (PM) à environ $R = 1 \text{ m}$ du verre dépoli, la longueur de cohérence L_c est de l'ordre du cm. Diaphragmant le détecteur (PM) avec une ouverture $\sim 0,1 \text{ mm}$, nous nous sommes, ainsi, assurés que le PM n'intègre pas spatialement.

La figure 1 représente aussi les allures spatiales des intensités diffractées (verre dépoli fixe) et diffusées (verre dépoli tournant) ainsi que les oscillogrammes des photocourants mesurés avec le PM d'intensité dans les deux cas. Après s'être assuré, avec un Fabry-Perot plan, du fonctionnement en monomode du laser, et vérifié que les courbes $p(n, T)$ et $q(n, T)$ étaient des lois de Poisson (verre dépoli fixe), nous avons fait les mêmes mesures sur la lumière pseudo-thermique (verre dépoli mobile).

Les résultats expérimentaux sont reportés en coordonnées semi-logarithmiques sur les figures 2 à 5.

Les distributions de photoélectrons (lois de comptages relaxés et déclenchés) montrent les natures statistiques différentes des lumières laser et pseudo-thermique (figures 2 et 3).

Les distributions des intervalles de temps montrent plus précisément les écarts liés au groupement des photoélectrons (figures 4 et 5).

Notons un accord satisfaisant entre les résultats expérimentaux et les calculs théoriques représentés en traits pleins sur les figures. Ajoutons également que les résultats relatifs au verre dépoli ont été vérifiés pour plusieurs angles de diffusion, vitesse de rotation du disque et valeurs des distances focales des lentilles convergentes utilisées.

Remarquons enfin qu'il n'y a pas lieu, ici, d'effectuer de corrections liées aux effets de temps mort pour les comptages, ou de corrections liées au fait que les durées de comptages, d'échantillonnage, ou d'analyse d'intervalles de temps sont finies.

En effet, nos conditions expérimentales étant :

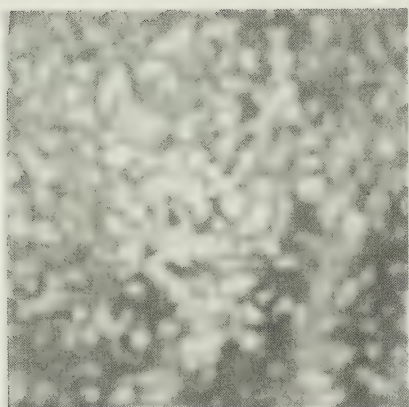
- temps de résolution électronique $T_r \approx 10^{-8} \text{ s}$
- temps d'échantillonnage $T \approx 10^{-6} \text{ s}$
- temps de corrélation de la lumière
pseudo-thermique $\tau_c \approx 10^{-4} \text{ s}$
- temps mort de l'échelle $\tau_m \approx 10^{-9} \text{ s}$
- temps max d'analyse du CTA $\tau_m \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ s}$

et les calculs de F.T. Arecchi (3) ayant montré que pour éviter les effets de temps mort, il fallait prendre une valeur moyenne de photoélectrons

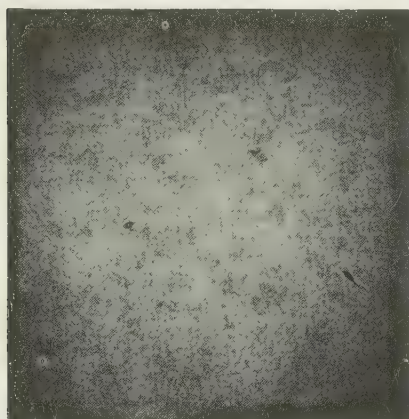
$$\langle n \rangle < 10^{-2} \frac{T}{\tau_m}$$

Dans notre cas, $\langle n \rangle < 10$, nous avons choisi $\langle n \rangle \approx 1$.

Nous pouvons donc conclure que pour les deux types d'expériences réalisées (comptages et intervalles de temps) l'accord avec les prévisions théoriques, obtenues à partir des mesures expérimentales de $\langle n \rangle$ et de $\langle I \rangle$, est convenable. Cependant, il est impossible d'affirmer que nous avons prouvé la nature Gaussienne du champ diffusé par un verre dépoli. Toutes les mesures effectuées montrent seulement qu'il n'y a pas d'écart, pour l'intensité, à la loi exponentielle déduite de la loi de Gauss pour le champ.



a



b



a



b

a — verre dépoli fixe
b — — — — — tournant

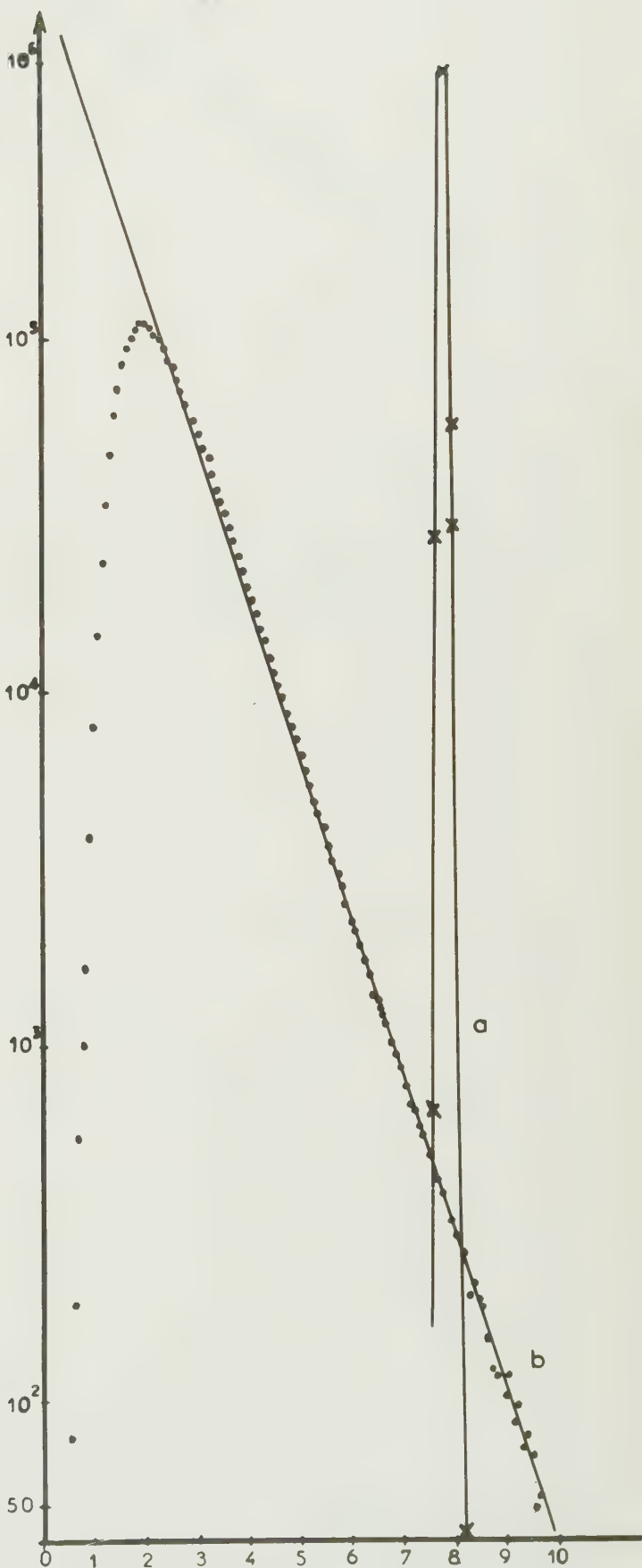


Fig. 1

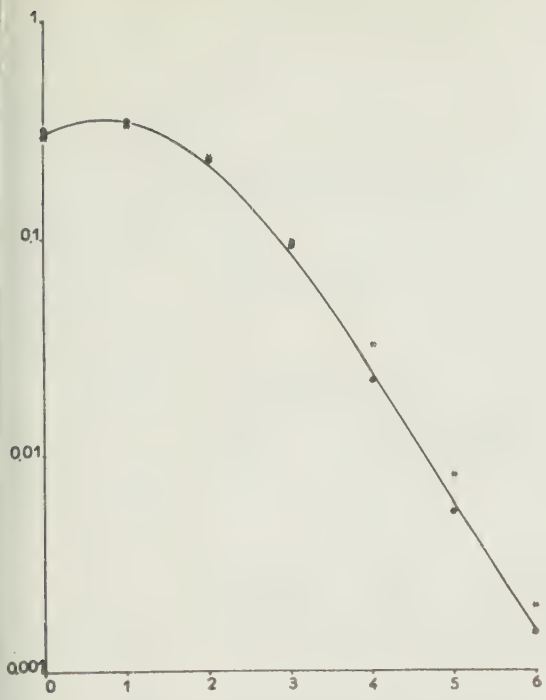


Fig. 2 Laser light. Probability distribution versus photoelectron count and experimental results for relaxed (●) and triggered (*) distributions. Theoretical curve obtained from Poisson law with $\langle n \rangle = 1.2$.

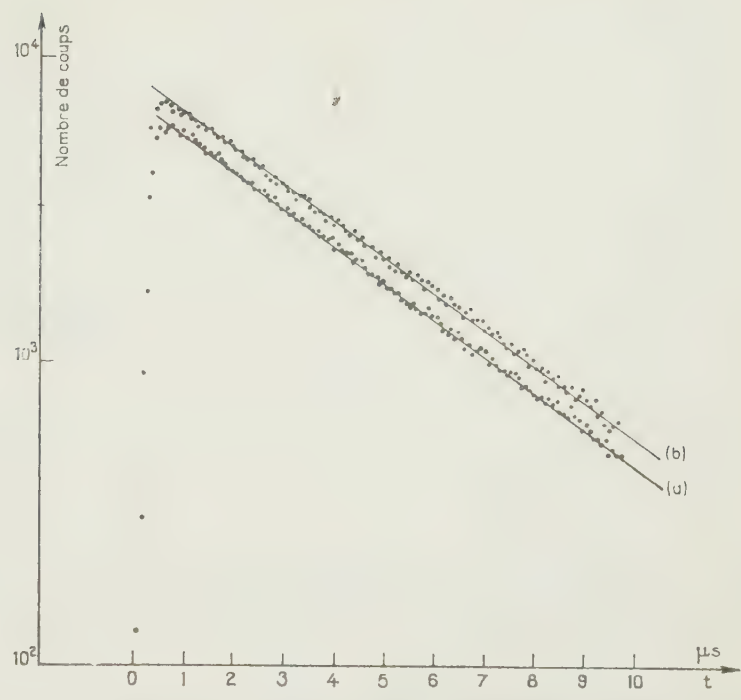


Fig. 4 — Distribution temporelle des photoélectrons issus d'un PM recevant, dans une aire de cohérence, une lumière laser.
 $\langle \rho \rangle \simeq 2,77 \cdot 10^5$ coups/s; temps de mesure : 30 s.
 (a) durée de vie résiduelle; (b) durée de vie.

lumière Laser

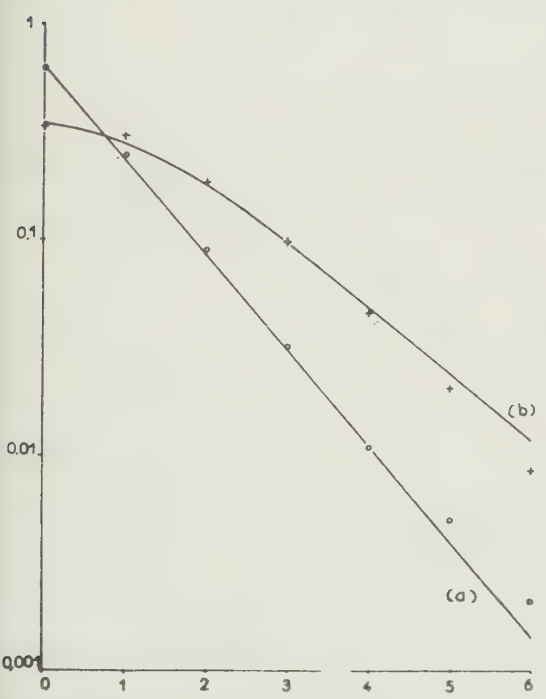


Fig. 3 Pseudo-thermal light. Probability distribution versus photoelectron count.
 (a) relaxed distribution: theoretical curve obtained by geometrical distribution with $\langle n \rangle = 0.6$.
 (b) triggered distribution: theoretical curve obtained from eq. (7) with $\langle n \rangle = 0.7$.



Fig. 5. — Distribution temporelle des photoélectrons issus d'un PM recevant, dans une aire de cohérence, une lumière pseudo-thermique.
 (a) durée de vie résiduelle = $\langle \rho_1 \rangle \simeq 2,55 \cdot 10^5$ coups/se; temps de mesure : 30 s
 (b) durée de vie = $\langle \rho_2 \rangle \simeq 2,90 \cdot 10^5$ coups/s; temps de mesure : 30/s.

lumière
pseudo-thermique

CHAPITRE IV

Champs modulés en intensité

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié quelques propriétés statistiques du champ pseudo-thermique créé expérimentalement par diffusion d'un champ laser monomode stabilisé en amplitude sur un milieu aléatoire, en l'occurrence un verre dépoli tournant. On peut, dans une certaine mesure, considérer que ce champ est obtenu par modulation linéaire aléatoire en amplitude du champ incident. Ainsi, si le champ incident s'écrit $Z_0(t) = e^{i\omega_0 t}$, le champ diffusé devient $Z(t) = \mathfrak{z}(t) e^{i\omega_0 t}$, où $\mathfrak{z}(t)$ est une modulation complexe d'amplitude.

Il est possible expérimentalement, de réaliser des systèmes de modulation en intensité du champ incident, de sorte que l'intensité lumineuse du champ modulé s'écrive

$$(IV-1) \quad I(t) = a I_0(t) V^2(t)$$

où a est une constante de proportionnalité et $V^2(t)$ le carré d'une fonction aléatoire réelle $V(t)$.

Ceci permet d'engendrer une classe beaucoup plus large de champs optiques et d'en étudier à la fois les propriétés statistiques et de vérifier les calculs généraux présentés dans les premiers chapitres.

L'équation (IV-1) permet d'effectuer tous les calculs où n'interviennent que les propriétés de l'intensité ; toutefois elle ne définit pas le champ modulé, comme dans le cas précédent, puisque toutes les propriétés de phase restent indéterminées. Le modulateur parfait d'intensité créerait à partir de $Z_0(t)$ le champ $\sqrt{I(t)} Z_0(t)$ quoiqu'en fait, il ne conduise pas à l'expression

$\sqrt{I(t)} e^{i\phi(t)} Z_0(t)$ où il apparaît le facteur de phase, facteur qui ne peut être mesuré que par les expériences de battement avec un signal de référence. En faisant varier $I_0(t)$ et $V(t)$, on s'aperçoit sur l'expression (IV-1) qu'on peut créer une classe assez vaste de champs, ce que nous avons effectivement réalisé. Cependant, afin de ne pas alourdir l'exposé, nous nous limitons ici à la présentation de deux cas significatifs : le champ Gaussien réel et le champ à double modulation Gaussienne.

IV-1. Champ Gaussien réel

Dans un travail récent, B. Picinbono et M. Rousseau ⁽⁴⁵⁾ ont introduit une classe de champs appelés champs Gaussiens généralisés dont le champ thermique n'était qu'un élément. Sans reprendre toute cette étude, il apparaît deux éléments extrêmes dans cette classe en particulier pour leur effet de groupement : le champ thermique précédemment étudié et le champ Gaussien réel dont le signal analytique s'écrit $Z(t) = \mathcal{X}(t) e^{i\omega_0 t}$ où $\mathcal{X}(t)$ est une fonction aléatoire Gaussienne réelle stationnaire. On voit immédiatement sur l'équation (IV-1) que si $I_0(t) = I_0$ et si $V(t)$ est une fonction Gaussienne réelle, $I(t)$ est l'intensité d'un champ Gaussien réel. Ainsi, en ce qui concerne les propriétés de l'intensité, on engendre un champ Gaussien réel par modulation d'intensité d'un champ laser par un signal Gaussien. La situation est comparable à celle évoquée au chapitre précédent, où on engendrait un champ "pseudo-thermique" ayant toutes les caractéristiques d'intensité d'un champ thermique.

Le temps de cohérence de ce champ est évidemment celui de corrélation de $V(t)$, qu'on supposera dans toute la suite grand devant tous les temps considérés, de sorte qu'on se contentera d'étudier les propriétés instantanées de $I(t)$.

La fonction $V(t)$ étant Gaussienne on déduit simplement la densité de probabilité $p(I)$ de l'intensité

$$(IV-2) \quad p(I) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(I < I > \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{I}{2 < I >}}$$

où $\langle I \rangle$ désigne la valeur moyenne de l'intensité.

A partir de (IV-2) on établit les principales lois de variables aléatoires introduites précédemment.

IV-1.a) Lois des comptages

α) relaxés :

$$(IV-3) \quad p(n, T) = \frac{(2n-1)!!}{n!} \frac{\langle n \rangle^n}{(1+2\langle n \rangle)^{n+\frac{1}{2}}}$$

où $\langle n \rangle = \langle I \rangle T$ est le nombre moyen de photoélectrons comptés dans $(0, T)$ et

$(2n-1)!! = 1.3.5 \dots (2n-1)$.

β) déclenchés :

$$(IV-4) \quad q(n, T) = \frac{(2n+1)!!}{n!} \frac{\langle n \rangle^n}{(1+2\langle n \rangle)^{n+\frac{3}{2}}}$$

Notons la relation liant les deux distributions

$$(IV-5) \quad q(n, T) = \frac{2n+1}{2\langle n \rangle + 1} p(n, T)$$

avec comme valeur initiale $p(0, T) = (1+2\langle n \rangle)^{-1/2}$

Pour terminer cette très brève étude sur les comptages, calculons le moment factoriel d'ordre k :

$$(IV-6) \quad \langle n^{[k]} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) p(n, T) = (2k-1)!! \langle n \rangle^k$$

IV-1.b) Lois des intervalles de temps

α) relaxés :

$$(IV-7) \quad W(t) = \langle I \rangle (1+2\langle I \rangle t)^{-3/2}$$

β) déclenchés :

$$(IV-8) \quad W(0/t) = 3 \langle I \rangle (1+2\langle I \rangle t)^{-5/2}$$

Et de même que précédemment, on déduit :

$$(IV-9) \quad h(t) = \frac{w(0|t)}{w(t)} = 3 (1 + 2\langle I \rangle t)^{-1}$$

avec comme valeur initiale $h(0) = 3$.

Cette valeur particulière, appelée effet de groupement, est généralement reliée à la valeur à l'origine de la fonction de corrélation. En effet, on remarque

$$\text{aisément que } h(0) = \Gamma_I(0) \cdot [\Gamma_I(\infty)]^{-1}$$

où $\Gamma_I(\tau)$ est la fonction de corrélation des fluctuations d'intensité que l'on trouve égale à : $\Gamma_I(\tau) = \langle I \rangle^2 [1 + 2 \gamma_V^2(\tau)]$

avec

$$\gamma_V(\tau) = \frac{\langle V(t) V(t-\tau) \rangle}{\langle V^2 \rangle}$$

En comparant cette valeur aux deux cas connus (laser $h = 1$, pseudo-thermique $h = 2$), nous constatons, du point de vue de l'effet de groupement, que le champ (G.r) est plus chaotique que les champs connus et étudiés jusque là.

Généralisons l'étude de la loi déclenchée $q(n, T)$ par le calcul de la loi déclenchée retardée $q(n; T, \theta)$. Le calcul de $q(n; T, \theta)$ se fait à partir de la loi bidimensionnelle $p(n_1, n_2)$ dans laquelle nous réalisons le cas particulier $n_2 = 1$ et $\langle n_2 \rangle \ll n_1$.

Partons de l'expression $p(n_1/1)$ calculée dans ⁽⁴⁵⁾

$$(IV-10) \quad p(n_1|1) = \frac{\Gamma(n_1 + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} n_1!} \left\{ -4 n_1 \langle n_p \rangle (1 - \gamma_V^2) \frac{A^{n_1-1}}{B^{n_1 + \frac{1}{2}}} + 2(n_1 + \frac{1}{2}) \frac{A^{n_1}}{B^{n_1 + \frac{3}{2}}} [1 + 2\langle n_p \rangle (1 - \gamma_V^2)] \right\}$$

$$\text{avec } A \approx 2\langle n_p \rangle, \quad B \approx 1 + 2\langle n_p \rangle \quad \text{et} \quad \gamma_V(\theta) = \frac{\langle V(t) V(t-\theta) \rangle}{\langle V^2 \rangle}$$

$$(IV-11) \quad p(n_1|1) = \frac{\Gamma(n_1 + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} n_1!} \left\{ -2\langle n_p \rangle (1 - \gamma_V^2) \frac{(2\langle n_p \rangle)^{n_1}}{(1 + 2\langle n_p \rangle)^{n_1 + \frac{1}{2}}} + 2(n_1 + \frac{1}{2}) \frac{(2\langle n_p \rangle)^{n_1}}{(1 + 2\langle n_p \rangle)^{n_1 + \frac{3}{2}}} [1 + 2\langle n_p \rangle (1 - \gamma_V^2)] \right\}$$

qui s'écrit encore ($n_1 \equiv n$)

$$(IV-12) \quad q(n; T, \theta) = (1 - \gamma_V^2(\theta)) p(n, T) + \gamma_V^2(\theta) q(n, T) = p(n, T) \left(1 - \gamma_V^2(\theta) + \frac{2n+1}{2\langle n \rangle + 1} \gamma_V^2(\theta) \right)$$

avec $p(n, T)$ et $q(n, T)$ les expressions (IV-3) et (IV-4) ci-dessus établies

La relation (IV-12) montre comment on peut déduire $\gamma_v^2(\theta)$ de $q(n, T, \theta)$.

Pour la suite, nous utilisons de préférence l'écriture

$$(IV-13) \quad q(n; T, \theta) = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \, n!} \frac{(2\langle n \rangle)^n}{(1 + 2\langle n \rangle)^{n+1}} \left(1 + 2 \frac{n - \langle n \rangle}{1 + 2\langle n \rangle} \gamma_v^2(\theta) \right)$$

qui est une forme voisine de celle établie pour le cas pseudo-thermique

(cf. Equation (III-22)).

IV-2. Double modulation Gaussienne

Pour augmenter les fluctuations d'intensité, c'est-à-dire également le groupement des photoélectrons, on pourrait songer à moduler en intensité un champ lui-même aléatoire. L'idée la plus simple consiste alors à partir d'un champ thermique, étudié au chapitre précédent et à le moduler comme au paragraphe précédent par une fonction Gaussienne. L'équation (IV-1) s'écrit alors

$$(IV-14) \quad I(t) = a I_o(t) V^2(t)$$

$I_o(t)$ l'intensité d'un champ pseudo-thermique et $V(t)$ la tension modulatrice. On suppose évidemment les fonctions $I_o(t)$ et $V(t)$ indépendantes de sorte que

$$(IV-15) \quad p(I) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi_{I/V}(u) e^{-iuI} p(V) du dV$$

$\varphi_{I/V}(u)$ est la fonction caractéristique de I conditionnellement à V . Comme $I_o(t)$ a une distribution exponentielle,

$$(IV-16) \quad \varphi_{I/V}(u) = [1 + iu I_o(V)]^{-1}$$

avec $I_o(V) = a \langle I_o \rangle V^2$ où $\langle I_o \rangle$ est la valeur moyenne de l'intensité pseudo-thermique non modulée.

D'après nos hypothèses, nous avons :

$$(IV-17) \quad p(V) = \frac{1}{\sigma_V \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{V^2}{2\sigma_V^2}}$$

que nous portons dans (IV-15) pour finalement obtenir :

$$(IV-18) \quad p(I) = (2\langle I \rangle I)^{-1/2} e^{-\sqrt{\frac{2I}{\langle I \rangle}}}$$

avec $\langle I \rangle = a \langle I_o \rangle \sigma_V^2$

L'expression (IV-18) diffère de celle établie dans le paragraphe précédent (IV-2).

On peut alors calculer à partir de l'équation (IV-18) la fonction génératrice $Q(s, t)$ des moments par la transformée de Laplace de $p(I)$:

$$(IV-19) \quad Q(s, t) = \int_0^\infty e^{-sIt} p(I) dI = \int_0^\infty e^{-sIt} \frac{e^{-\sqrt{\frac{2I}{\langle I \rangle}}}}{\sqrt{2I\langle I \rangle}} dI$$

On obtient, après le changement de variable $I = x^2$, (cf. Réf. () p. 307)

$$(IV-20) \quad Q(s, t) = \sqrt{\pi} (2s\langle I \rangle t)^{-1/2} e^{\frac{1}{2s\langle I \rangle t}} \left[1 - \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{2s\langle I \rangle t}} \right) \right]$$

où $\Phi(x)$ est l'intégrale $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

La connaissance de $p(I)$ et de $Q(s, t)$ définit et caractérise pour la lumière que nous appelons à double modulation Gaussienne, les propriétés statistiques à une dimension.

a) loi des comptages

A partir de l'équation (I-35) et de l'équation (IV-18), $p(n, T)$ s'obtient :

$$(IV-21) \quad p(n, T) = \frac{(2n)!}{2^n n!} \exp\left(\frac{1}{4\langle n \rangle}\right) D_{-(2n+1)}\left(\frac{1}{\sqrt{\langle n \rangle}}\right)$$

où $D_n(x)$ est la "fonction cylindrique parabolique" qu'on peut définir sous plusieurs formes (cf. Réf. (25) p. 1064), en particulier par l'intermédiaire des fonctions d'Hermite

$$D_n(x) = \frac{1}{2^n} e^{-\frac{x^2}{4}} H_n\left(\frac{x}{2}\right)$$

Dès lors, la densité de probabilité de $q(n, T)$ s'écrit très simplement en fonction de $p(n, T)$ sous la forme :

$$q(n, T) = \frac{n+1}{\langle n \rangle} p(n+1, T)$$

Enfin, on peut calculer la loi des comptages déclenchés retardés $q(n; T, \theta)$ pour T choisi très petit devant τ_c mais θ est quelconque.

Partons de l'expression (I-36) définissant les $q(n; T, \theta)$.

Désignons par

$I_1 = I_{o1} V_1^2$ la valeur de l'intensité instantanée à l'origine et

$I_2 = I_{o2} V_2^2$ la valeur de l'intensité instantanée en θ et dans $(\theta, \theta+T)$

puisque l'on considère le cas $T \ll \tau_c$.

De sorte que l'on peut écrire

$$q(n; T, \theta) = \frac{1}{\langle I \rangle} \langle I_{o1} V_1^2 \frac{(I_{o2} V_2^2)^n}{n!} e^{-I_{o2} V_2^2} \rangle$$

Cherchons la loi conditionnelle par rapport à $V(t)$

$$q(n; T, \theta | V) = \frac{1}{\langle I \rangle} \frac{V_1^2}{n!} \langle I_{o1} e^{-I_{o1} V_1^2} (I_{o2} V_2^2)^n \rangle$$

Nous sommes dans les mêmes conditions que pour le cas thermique, V_2 étant considérée comme constante. Il suffit donc dans l'expression (III-22) de remplacer

$\langle n \rangle$ par $\langle n \rangle_o V_2^2$, ($\langle n \rangle_o = \langle I_{o1} \rangle T$) soit,

$$(IV-22) \quad q(n; T, \theta | V) = \frac{1}{\langle I \rangle} \frac{V_1^2}{n!} \frac{(\langle n \rangle_o V_2^2)^n}{(1 + \langle n \rangle_o V_2^2)^{n+1}} \left[1 + \frac{n - \langle n \rangle_o V_2^2}{1 + \langle n \rangle_o V_2^2} |\gamma_{I_o}(\theta)|^2 \right]$$

La loi à priori s'obtient en opérant la moyenne de $q(n; T, \theta | V)$ par rapport à

V ; ce qui s'écrit

$$(IV-23) \quad q(n; T, \theta) = \frac{\langle n \rangle_o^n}{2\pi\sigma^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{V_1^2 V_2^{2n}}{(1 + \langle n \rangle_o V_2^2)^{n+1}} \left[1 + \frac{n - \langle n \rangle_o V_2^2}{1 + \langle n \rangle_o V_2^2} |\gamma_{I_o}(\theta)|^2 \right] e^{-\frac{V_1^2 + V_2^2 - 2\gamma_V V_1 V_2}{2\sigma_V^2(1 - \gamma_V^2)}} dV_1 dV_2$$

où $\gamma_V(\theta)$ est la fonction de corrélation de $V = \frac{\langle V(u) V(u+\theta) \rangle}{\langle V^2 \rangle}$

on intègre d'abord par rapport à V_1

$$(IV-24) \quad q(n; T, \theta) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} (1 - \gamma_V^2)^{\frac{3}{2}} \langle n \rangle_o^n \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{\gamma_V^2}{\sigma^2(1 - \gamma_V^2)} x^2 \right) [\dots] e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

où x désigne V_2 , et

$$(IV-25) \quad [\dots] = \frac{x^{2n}}{(1 + \langle n \rangle_o x^2)^{n+1}} + n |\gamma_{I_o}(\theta)|^2 \frac{x^{2n}}{(1 + \langle n \rangle_o x^2)^{n+2}} - \langle n \rangle_o |\gamma_{I_o}(\theta)|^2 \frac{x^{2(n+1)}}{(1 + \langle n \rangle_o x^2)^{n+2}}$$

on fait le changement de variable $u = x^2$ et on utilise le résultat de l'intégrale (voir par exemple Gradshteyn et Ryzhik, p. 319, intégrale 8)

$$\int_0^\infty u^{\nu-1} (u+\beta)^{-\alpha} e^{-\mu u} du = \beta^{\frac{\nu-\alpha-1}{2}} \mu^{\frac{\alpha-\nu-1}{2}} e^{\frac{\beta\mu}{2}} \Gamma(\nu) W_{\frac{1-\nu-\alpha}{2}, \frac{\nu-\alpha}{2}}(\beta\mu)$$

où $W_{\lambda, \mu}(x)$ sont les fonctions de Whittaker (58)

on trouve alors le résultat final

$$q(n; T, \theta) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} (1 - \gamma_v^2(\theta)) \Gamma(n + \frac{1}{2}) e^{\frac{1}{4\langle n \rangle}}$$

$$\left\{ \left(\frac{2}{\langle n \rangle} \right)^{\frac{3}{4}} W_{-n-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2\langle n \rangle} \right) + \frac{\gamma_v^2(\theta)}{1 - \gamma_v^2(\theta)} \frac{2n+1}{2} \left(\frac{2}{\langle n \rangle} \right)^{\frac{3}{4}} W_{-n-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2\langle n \rangle} \right) \right.$$

$$+ \frac{n}{\langle n \rangle} \left(\frac{2}{\langle n \rangle} \right)^{\frac{1}{4}} |\gamma_{I_0}(\theta)|^2 W_{-n-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{2\langle n \rangle} \right) + \frac{2n+1}{2} \left(\frac{2}{\langle n \rangle} \right)^{\frac{1}{4}} |\gamma_{I_0}(\theta)|^2 \times$$

(IV-26)

$$\times \left(\frac{n}{\langle n \rangle} \frac{\gamma_v^2(\theta)}{\gamma_v^2(\theta) - 1} - 1 \right) W_{-n-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2\langle n \rangle} \right) - \frac{(2n+1)(2n+3)}{4} \left(\frac{2}{\langle n \rangle} \right)^{\frac{3}{4}} \frac{\gamma_v^2(\theta) |\gamma_{I_0}(\theta)|^2}{1 - \gamma_v^2(\theta)} W_{-n-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2\langle n \rangle} \right)$$

où l'on désigne $\langle n \rangle$ par $\langle n \rangle_0 \sigma^2$, et

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} (2n-1) !!$$

et $\gamma_{I_0}(\theta)$ la fonction de corrélation normalisée du signal analytique pseudo-thermique.

Comme dans le paragraphe I, calculons le moment factoriel d'ordre k

$$\langle n^{[k]} \rangle = \sum_n n(n-1) \dots (n-k+1) p(n, T) = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial s^k} Q(s) \Big|_{s=0}$$

qui s'écrit

$$(IV-27) \quad \langle n^{[k]} \rangle = k! (2k-1)!! \langle n \rangle^k$$

Il est maintenant intéressant de comparer les $\langle n^{[2]} \rangle$ pour les divers champs connus et réalisables expérimentalement :

$$\text{laser } \langle n^{[2]} \rangle = \langle n \rangle^2$$

$$\text{champ pseudo thermique } \langle n^{[2]} \rangle = 2 \langle n \rangle^2$$

$$\text{champ Gaussien réel } \langle n^{[2]} \rangle = 3 \langle n \rangle^2$$

$$\text{champ Gaussien généralisé } \langle n^{[2]} \rangle = 6 \langle n \rangle^2$$

Le rapport $h = \frac{\langle n^{[2]} \rangle}{\langle n \rangle^2}$ constitue l'effet de groupement et caractérise, au second ordre, les différents champs optiques.

Une autre façon de retrouver une partie de ces résultats consiste, comme nous l'avons vu au paravant, à étudier les lois des intervalles de temps.

b) lois des intervalles de temps

Un calcul très simple utilisant les expressions (I-40) (I-41) ainsi que la densité de probabilité (IV-18) conduit aux expressions des lois du temps de vie et d'attente résiduelle, respectivement (cf. Réf. (25) p. 319).

$$(IV-28) \quad w(0|t) = \langle I \rangle (\langle I \rangle t)^{-\frac{5}{2}} \exp\left(-\frac{1}{4\langle I \rangle t}\right) D_{-5}\left(\frac{1}{\sqrt{\langle I \rangle t}}\right)$$

$$(IV-29) \quad w(t) = \langle I \rangle (\langle I \rangle t)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{4\langle I \rangle t}\right) D_{-3}\left(\frac{1}{\sqrt{\langle I \rangle t}}\right)$$

Notons la valeur particulière déjà signalée plus haut

$$h = \frac{W(0/0)}{W(0)} = 6.$$

Notons enfin l'analogie de nos résultats avec ceux obtenus pour la statistique de l'absorption à deux photons (29) (56) et ceux obtenus pour la statistique des fluctuations de la lumière thermique diffusée par un milieu aléatoire "modulant" le champ par une Gaussienne (9).

IV-3. Résultats expérimentaux

A l'aide du dispositif expérimental représenté sur la figure 4 du chapitre II, nous avons réalisé des expériences portant sur les deux types de champs ci-dessus décrits.

Ces champs modulés en intensité sont obtenus à partir des champs optiques fondamentaux (laser, pseudo-thermique). Le principe de la méthode de modulation est basé sur les propriétés électrooptiques des cristaux de KDP.

Ce modulateur (type ISOMET EOLM 400) est, afin d'abaisser la valeur de sa tension caractéristique V_0 à 2100 V, formé de deux cristaux de KDP deutéré convenablement orientés. On le dispose de telle manière que l'axe optique du cristal soit confondu avec la direction du faisceau lumineux. Entre polariseurs croisés, (Polaroid HN 22), la transmission est très faible : de l'ordre 10^{-4} de l'intensité incidente.

Des tensions de modulation sont amplifiées par un amplificateur à large bande ($\sim 0 - 50$ KHZ) et sont dans notre cas, soit certaines (sinusoïdale) soit aléatoires (gaussienne).

Le fonctionnement d'un tel modulateur et les calculs de l'intensité transmise en fonction de la tension de modulation, sont amplement décrits dans "Quantum Electronics" de A. Yariv (59).

Les résultats expérimentaux obtenus sont reportés, en coordonnées semi-logarithmiques sur les figures 1 à 4.

Les courbes théoriques calculées à l'ordinateur à partir des équations (IV-3) à (IV-8) et (IV-20) à (IV-30) sont tracées en traits pleins. Ces courbes s'obtiennent en substituant dans ces équations les valeurs de $\langle n \rangle$ et $\langle I \rangle$ déduites des mesures expérimentales.

On note un accord satisfaisant entre les résultats expérimentaux et prédictions théoriques pour les deux types de champs. On vérifie spécialement sur les courbes d'intervalles de temps en mesurant les rapports $h = \frac{W(o/o)}{W(o)}$, les valeurs de l'effet de groupement h prévues.

On remarque également que l'effet de modulation de l'intensité peut s'interpréter comme une augmentation de h . (Gaussien réel $h = 3$, Double mod. Gauss. $h = 6$).

Pour terminer, intéressons-nous à une étude comparative des deux champs. Pour cela, il est commode d'utiliser la fonction de n

$$(IV-30) \quad f(n) = \langle n \rangle \frac{q(n, T)}{p(n, T)}$$

ou la définition équivalente

$$(IV-31) \quad f(n) = n+1 \frac{p(n+1, T)}{p(n, T)}$$

Dans le cas Gaussien réel, on peut voir que

$$(IV-32) \quad f(n) = \frac{\langle n \rangle}{2\langle n \rangle + 1} (2n+1)$$

fonction linéaire de n ; tandis que dans le cas de la double modulation Gaussienne

$$(IV-33) \quad f(n) = (2n+1)(n+1) \frac{D_{-(2n+3)} \left(\frac{1}{\sqrt{\langle n \rangle}} \right)}{D_{-(2n+1)} \left(\frac{1}{\sqrt{\langle n \rangle}} \right)}$$

fonction qui est, au moins, du second degré en n .

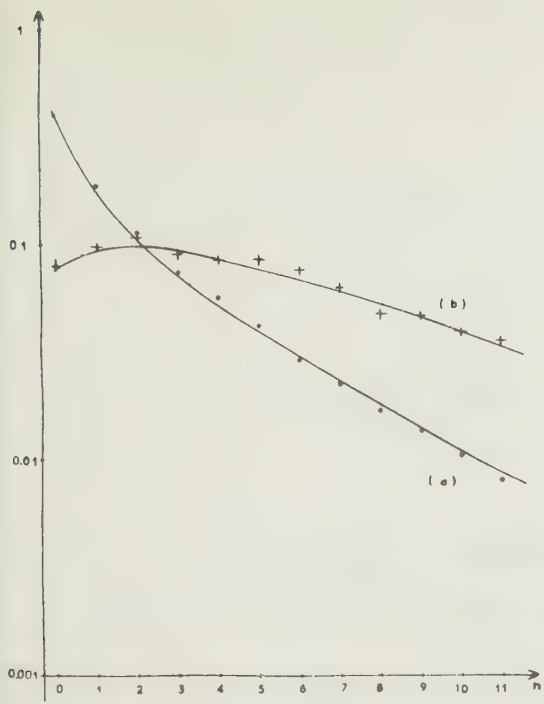


Fig. 1. Photon counting distributions. (a) Relaxed distribution with $\langle n \rangle = 2.40 \pm 0.05$. (b) Triggered distribution with $\langle n \rangle = 2.27 \pm 0.05$. $\langle I \rangle = (7.05 \pm 0.05) \times 10^5$ counts per second.



Fig. 3. Time intervals distributions. (a) Life time distribution. (b) Residual waiting time. $\langle I \rangle = (7.05 \pm 0.05) \times 10^5$ counts per second.

"Gaussien réel"

$$i(t) = i_0 V(t)^2$$

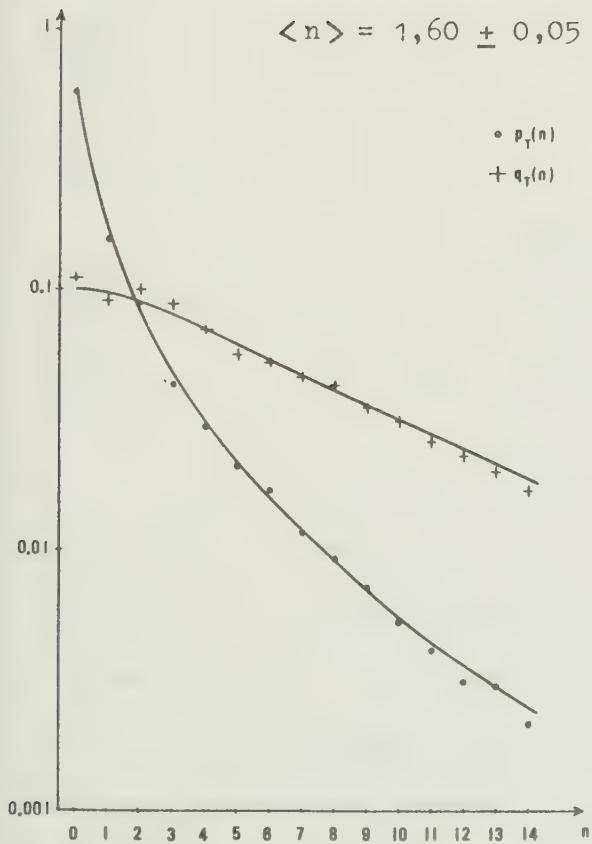


FIG. 2. Photoelectrons-counting distributions. Relaxed $p_T(n)$ and triggered $q_T(n)$ distributions.

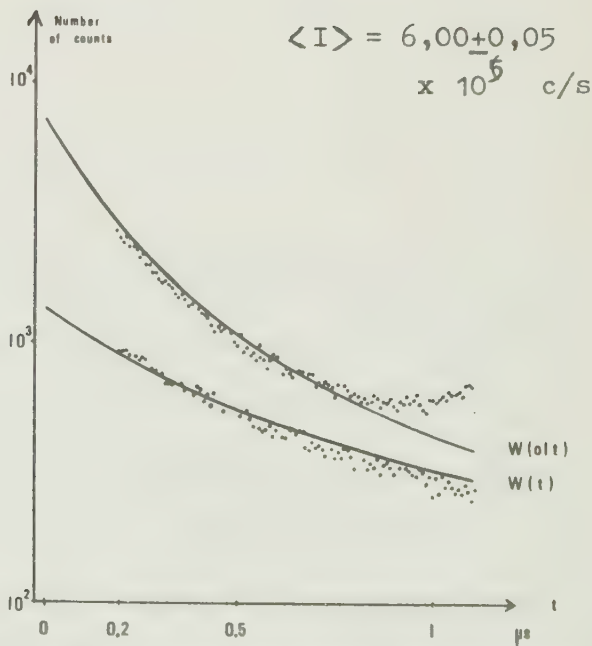


FIG. 4. Time-interval distributions. Lifetime $w(0/t)$ and residual-waiting time $w(t)$.

Double modulation Gauss.

$$i(t) = j(t) V(t)^2$$

CHAPITRE V

Etude des corrélations d'intensité

L'expérience fondamentale de Hanbury-Brown et Twiss a mis en évidence et permis de mesurer les corrélations des fluctuations d'intensité d'une source quasi-monochromatique.

Depuis, cette expérience a été reprise sous de très nombreuses formes que nous décrirons dans la suite.

Outre l'intérêt théorique de ces expériences, on peut montrer que, pour de nombreux types de champ, la fonction de corrélation d'intensité est reliée simplement à celle du champ, et dès lors, les méthodes de corrélation d'intensité sont des méthodes de spectroscopie optique surpassant largement les méthodes optiques traditionnelles, surtout dans le cas de largeurs de raie très fines que l'on rencontre, par exemple, dans les expériences de diffusion à partir de sources laser très étroites.

En son principe, l'expérience de corrélation d'intensité a pour but de déterminer la fonction de corrélation

$$(V-1) \quad \Gamma_I(\tau) = \langle I(t) I(t-\tau) \rangle$$

Pour ce faire, on place deux détecteurs d'intensité en deux points où existent les champs $E(t)$ et $E(t-\tau)$. Ces détecteurs mesurent les intensités $I(t)$ et $I(t-\tau)$, fonctions aléatoires et stationnaires du temps. Ces fonctions sont multipliées et leur produit est intégré avec une grande constante de temps, ce qui donne, aux erreurs dues à une intégration finie près, la fonction $\Gamma_I(\tau)$. Montrons, par exemple, que dans le cas d'un champ complexe $Z(t)$ thermique, cette fonction de corrélation s'exprime simplement en fonction de $\Gamma_Z(\tau)$, fonction de corrélation du champ.

En effet, $I(t)$ et $I(t-\tau)$ s'écrivent par l'intermédiaire des signaux analytiques gaussiens $Z(t)$ et $Z(t-\tau)$ associés aux champs réels $E(t)$ et $E(t-\tau)$ de sorte que l'on a :

$$(V-2) \quad \Gamma_I(\tau) = \langle Z(t) Z^*(t) Z(t-\tau) Z^*(t-\tau) \rangle$$

Le moment d'ordre 4 défini par (I-18) peut se développer sous la forme :

$$(V-3) \quad \Gamma_I(\tau) = \langle Z(t) Z^*(t) \rangle \langle Z(t-\tau) Z^*(t-\tau) \rangle + \langle Z(t) Z^*(t-\tau) \rangle \langle Z(t-\tau) Z^*(t) \rangle$$

Expression qui se simplifie en :

$$(V-4) \quad \Gamma_I(\tau) = \langle I \rangle^2 + |\Gamma_Z(\tau)|^2$$

dans laquelle $\Gamma_Z(\tau) = \langle Z(t) Z^*(t-\tau) \rangle$.

La possibilité d'exprimer $\Gamma_I(\tau)$ en fonction de $\Gamma_Z(\tau)$ est valable pour d'autres types de champs, en particulier tous les champs gaussiens non thermiques mais on obtient évidemment des expressions explicites différentes de (V-4).

Dans la première partie de ce chapitre, nous nous proposons de passer en revue les principales méthodes connues pour mesurer $\Gamma_I(\tau)$. Dans certains cas, nous pousserons les calculs en utilisant des modèles particuliers de champ, afin d'indiquer comment les différentes méthodes dépendent de la statistique du champ incident. Après avoir développé un calcul de fonction de corrélation dans le cas du champ pseudo-thermique obtenu par diffusion sur un verre dépoli tournant, nous présenterons quelques résultats expérimentaux obtenus sur ce type de champ.

V-1. Méthodes de mesure des fonctions de corrélation de l'intensité

Les méthodes expérimentales pour la mesure de $\Gamma_I(\tau)$ sont nombreuses. On peut, en effet, obtenir $\Gamma_I(\tau)$ soit directement à l'aide de deux détecteurs associés à un circuit à coïncidences (ou, comme nous le verrons, à un CTA) soit indirectement, à partir d'un détecteur et d'un circuit de comptages, compte tenu des relations liant les lois des comptages à la fonction de corrélation $\Gamma_I(\tau)$. Décrivons brièvement les principes de chacune de ces méthodes.

V-1.a) Méthodes à deux détecteurs

Les trois techniques que nous exposons plus bas sont essentiellement équivalentes et ne diffèrent que dans la façon de réaliser le produit $I(t) I(t-\tau)$.

V-1.a.1) Corrélateur d'intensité

Avec ce dispositif, le produit est effectué par un multiplicateur analogique et l'intégration par un moteur entraînant un compte-tours dont l'indication sera proportionnelle, au bout d'un temps donné, à la corrélation entre les signaux photoélectriques, détectés par les deux détecteurs (P.M.).

V-1.a.2) Méthode des coïncidences

Ce deuxième dispositif utilise un compteur à coïncidences qui enregistre un coup lorsqu'il reçoit des impulsions simultanées des deux P.M.

L'évènement à enregistrer est donc la probabilité de coïncidence :

$$(V-5) \quad p(c) dt_1 dt_2 = \alpha_1 \alpha_2 \langle I(t_1) I(t_2) \rangle dt_1 dt_2$$

où dt_1 et dt_2 sont les intervalles de temps autour de t_1 et t_2 , et α_1 et α_2 sont des constantes liées aux détecteurs.

On peut montrer que l'accroissement relatif du taux de coïncidence dû à la cohérence de la lumière sur les deux détecteurs est ⁽²⁶⁾ :

$$(V-6) \quad R = \frac{1}{4} \frac{\tau_c}{\tau_R}$$

où τ_c est le temps de cohérence de la lumière et τ_R le temps de résolution du

compteur de coïncidence. On voit donc qu'on a intérêt à utiliser un circuit à coïncidence dont le temps de résolution est aussi réduit que possible.

V-1.a.3) Méthode CTA

Expérimentalement, on remplace avantageusement la méthode des coïncidences par la méthode du CTA, bien que le résultat ne soit pas, en toute rigueur, le même.

En effet, l'évènement enregistré à la sortie du CTA est l'intervalle de temps séparant deux impulsions consécutives arrivées sur les deux voies.

La d.d.p. de détecter l'intervalle $t_1 - t_2$ est d'après l'équation (I-40)

$$(V-7) \quad W(t_1 | t_2) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\langle I \rangle} \left\langle I(t_1) I(t_2) e^{-\alpha_2 \int_{t_1}^{t_2} I(\theta) d\theta} \right\rangle$$

En général, l'équation (V-7) est différente de (V-5). Cependant, lorsque

$$(V-8) \quad \alpha_2 \int_{t_1}^{t_2} I(\theta) d\theta \ll 1$$

c'est-à-dire lorsque la densité moyenne de photoélectrons sur chaque voie est très faible, le résultat (V-7) est identique à (V-5), et le CTA fournit bien la fonction de corrélation de l'intensité.

V-1.b) Méthodes à un détecteur

Les méthodes à deux détecteurs possèdent sur les méthodes à un détecteur, ainsi que nous le verrons plus bas à l'occasion de l'étude expérimentale, l'avantage d'un meilleur rapport signal sur bruit.

En effet, les deux détecteurs étant considérés comme indépendants, ils donnent des bruits non corrélés donc, en principe, non mesurés. Seul subsistant le terme en $\langle I \rangle^2$ qui est le bruit de fond habituel.

Toutefois, les méthodes à un détecteur, basées sur les méthodes de comptages, conservent un intérêt d'ordre théorique et surtout, elles peuvent être réalisées avec un appareillage réduit.

Examinons en détail les principes de trois d'entre elles.

V-1.b.1) Comptages simples à temps de comptages variables :

La méthode consiste à établir une relation entre $\Gamma_I(T)$ et $\langle n^{[2]} \rangle_T$ considérée comme fonction de T.

Rappelons les définitions intervenant dans les calculs :

$$(V-9) \quad \langle n^{[2]} \rangle_T = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) p(n, T)$$

$$(V-10) \quad \langle n \rangle_T = \sum_{n=0}^{\infty} n p(n, T)$$

Définissons, maintenant la fonction G(T)

$$(V-11) \quad G(T) = \langle n^{[2]} \rangle_T - \langle n \rangle_T^2$$

A l'aide de ces relations et de l'équation (I-52), établissons la relation liant $\Gamma_I(T)$ et $\langle n^{[2]} \rangle_T$

Nous avons

$$(V-12) \quad \langle n^{[2]} \rangle_T = \frac{\partial^2}{\partial s^2} Q(s, T) \Big|_{s=0}$$

et

$$(V-13) \quad Q(s, T) = \left\langle e^{-s \int_t^{t+T} I(\theta) d\theta} \right\rangle$$

soit en effectuant la double dérivation de Q(s, T) comme indiqué en (V-12) :

$$(V-14) \quad \langle n^{[2]} \rangle_T = \left\langle \int_t^{t+T} \int_t^{t+T} I(\theta_1) I(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right\rangle$$

soit encore pour les champs stationnaires tels que $\Gamma_I(\theta_1, \theta_2) = \Gamma_I(\theta_1 - \theta_2) = \Gamma_I(\tau)$

$$(V-15) \quad G(T) = 2 \langle (\Delta I)^2 \rangle \int_0^T (T-\tau) \gamma_I(\tau) d\tau$$

$$\text{où} \quad \gamma_I(\tau) = \frac{\langle \Delta I(t) \Delta I(t-\tau) \rangle}{\langle (\Delta I)^2 \rangle}$$

avec

$$\Delta I(t) = I(t) - \langle I \rangle$$

L'équation (V-15) nous permet ainsi d'en déduire $\gamma_I(T)$. En effet, nous vérifions que

$$(V-16) \quad \frac{d^2}{dT^2} G(T) = \frac{2}{T^2} G(0) \gamma_I(T)$$

Récapitulons le mode opératoire. On commence par faire, comme indiqué dans les chapitres précédents, une mesure de la loi des $p(n, T)$, ce qui nous permet d'en déduire par (V-9) et (V-11), $G(T)$. Et ceci pour plusieurs valeurs de T . Puis en chaque point de $G(T)$, on détermine la dérivée seconde, qui nous permet, grâce à la relation (V-16) d'en déduire $\gamma_I(T)$.

Un programme simple sur ordinateur nous donne les valeurs numériques à partir des résultats expérimentaux.

V-1.b.2) Comptages déclenchés retardés :

On calcule la probabilité $q(n; T, \theta)$ de compter n photoélectrons dans un intervalle de temps $(\theta, \theta+T)$ conditionnellement à la détection d'un photoélectron à l'instant origine :

$$(V-17) \quad q(n; T, \theta) = \frac{1}{\langle I \rangle} \langle I(0) \frac{(I(\theta) T)^n}{n!} e^{-I(\theta) T} \rangle$$

expression dans laquelle T est choisi petit devant le temps de cohérence mais θ est quelconque.

Développons l'expression (V-17) dans le cas, par exemple, de la lumière pseudo-thermique, cas où l'on peut mener complètement les calculs.

L'expression de $q(n; T, \theta)$ a été précédemment établie (cf. Equation (III-22))

$$(V-18) \quad q(n; T, \theta) = \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}} \left[1 + \frac{n - \langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} |\gamma_2(\theta)|^2 \right]$$

où $\gamma_z(\theta)$ est la fonction normalisée de corrélation du champ pseudo-thermique et $\langle n \rangle$ le nombre moyen de photoélectrons comptés dans $(\theta, \theta+T)$.

On sait, d'après (I-18) que

$$\gamma_I(\theta) = 1 + |\gamma_z(\theta)|^2$$

Portons cette relation dans (V-18), il vient

$$(V-19) \quad \gamma_I(\theta) = 1 + \frac{1 + \langle n \rangle}{\langle n \rangle} \left[1 - (1 + \langle n \rangle) q(0; T, \theta) \right]$$

qui montre bien la possibilité de mesurer $\gamma_I(\theta)$ à partir des expériences de comptages.

Nous verrons par la suite qu'une relation analogue peut être établie pour le champ Gaussien réel, et en général, pour tout champ de statistique connue. Seule la forme plus ou moins compliquée nous empêchera de le faire dans tous les cas.

V-1.b.3) Comptages écrétés

En vue d'une application à la spectroscopie optique, E. Jakeman et E.R. Pike ont adapté les calculs bien connus de Van Vleck, établissant une relation entre la fonction de corrélation d'un signal Gaussien et la fonction de corrélation du même signal écreté.

Notre but est de voir, dans quelles conditions ce calcul est applicable en Optique Statistique, et d'étudier le rôle joué par la statistique du signal Gaussien ou non.

On s'intéresse donc à la quantité $\langle n(0, T) n(\tau, T) \rangle$, où $n(0, T)$ est le nombre de photoélectrons enregistrés dans l'intervalle $(0, 0+T)$ et $n(\tau, T)$ dans l'intervalle $(\tau, \tau+T)$, T est très petit devant le temps de cohérence. Nous écrirons, dans la suite, $n(t)$ au lieu de $n(t, T)$.

Désignons par $n_k(t)$ le nombre de photoélectrons enregistrés dans $(t, t+T)$ après écretage du signal :

$$(V-20) \quad \begin{aligned} n_k(t) &= 1 & \text{si } n(t) > k \\ n_k(t) &= 0 & \text{si } n(t) \leq k \end{aligned}$$

Il s'agit de voir dans quels cas

$$\frac{\langle n_k(0) n_k(\tau) \rangle}{\langle n_k \rangle^2} \quad \text{s'exprime de façon explicite en fonction de} \quad \frac{\langle n(0) n(\tau) \rangle}{\langle n \rangle^2}$$

Examinons tout d'abord le cas du simple écrétage $\frac{\langle n_k(0) n(\tau) \rangle}{\langle n_k \rangle \langle n \rangle}$

V-1.b.3.α) Simple écrétage - relations générales

Les calculs sont très simples lorsque $k = 0$.

Appelons $A_0(\tau)$ la fonction de corrélation après écrétage.

On a alors :

$$\begin{aligned} (V-21) \quad A_0(\tau) &= \frac{\langle n_0(0) n(\tau) \rangle}{\langle n_0 \rangle \langle n \rangle} = \frac{1}{\langle n_0 \rangle \langle n \rangle} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n p(n, m) \\ &= \frac{1}{\langle n_0 \rangle \langle n \rangle} \left[\langle n \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} n p(n, 0) \right] \end{aligned}$$

Or d'après (I-57)

$$(V-22) \quad p(n, 0) = \frac{(-1)^n}{n!} \left. \frac{\partial^n}{\partial s_1^n} Q(s_1, s_2) \right|_{s_1=s_2=1}$$

soit, compte tenu de (V-21)

$$(V-23) \quad A_0(\tau) = \frac{1}{\langle n_0 \rangle \langle n \rangle} \left[\langle n \rangle + \left. \frac{\partial}{\partial s_1} Q(s_1-1, s_2) \right|_{s_1=s_2=1} \right]$$

$Q(s_1, s_2)$ est la fonction génératrice à deux dimensions définie en (I-58)

Remarquons que l'on peut écrire $A_0(\tau)$ sous une forme qui nous est plus habituelle.

En effet,

$$\begin{aligned} (V-24) \quad Q(s_1, s_2) &= \langle e^{-(s_1 T I_1 + s_2 T I_2)} \rangle \\ Q(s_1-1, s_2) &= \langle e^{-s_1 I_1 T - s_2 I_2 T + I_1 T} \rangle \end{aligned}$$

$$(V-25) \quad \left. \frac{\partial Q(s_1-1, s_2)}{\partial s_1} \right|_{s_1=s_2=1} = -T \langle e^{-I_2 T} \cdot I_1 \rangle$$

Or, d'après la définition (I-36) des $q(n; T, \tau)$

$$(V-26) \quad q(0; T, \tau) = \frac{1}{\langle I \rangle} \langle I(0) e^{-I(\tau) T} \rangle$$

ce qui permet de réécrire $A_o(\tau)$, après identification $I_1 \equiv I(o)$ et $I_2 \equiv I(\tau)$

$$(V-27) \quad A_o(\tau) = \frac{1}{\langle n_o \rangle} \left[1 - \frac{1}{\langle I \rangle} \langle I(o) e^{-I(\tau)T} \rangle \right] \\ = \frac{1}{\langle n_o \rangle} [1 - q(o; T, \tau)]$$

Nous allons appliquer cette formule à divers champs optiques et étudier comment $A_o(\tau)$ peut s'exprimer à l'aide de la fonction de corrélation des fluctuations d'intensité non écrétée.

V-1.b.3.β) Champ pseudo-thermique

On reprend l'égalité (V-18) dans laquelle nous faisons $n = 0$, soit

$$(V-28) \quad q(o, T, \tau) = \frac{1}{1 + \langle n \rangle} \left[1 - \frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} |\chi_z(\tau)|^2 \right]$$

D'autre part,

$$(V-29) \quad \langle n_o \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} p(n, T) = 1 - p(o, T)$$

Sachant que

$$(V-30) \quad p(n, T) = \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}}$$

Connaissant $q(o, T, \tau)$ donnée par (V-28), et la valeur $\langle n_o \rangle$ ci-dessus calculée, l'expression (V-27) se développe alors simplement

$$(V-31) \quad A_o(\tau) = 1 + \frac{1}{1 + \langle n \rangle} |\chi_z(\tau)|^2$$

qui pour

$\langle n \rangle \rightarrow 0$ devient égale à $\gamma_I(\tau)$.

V-1.b.3.γ) Champ Gaussien réel

L'intensité instantanée s'écrit, nous l'avons vu en (IV-1),

$$(V-32) \quad I(t) = I_c V^2(t)$$

Un calcul direct de la fonction de corrélation normalisée de l'intensité non écrétée, nous donne :

$$(V-33) \quad \gamma_I(\tau) = 1 + 2 \gamma_V^2(\tau)$$

où γ_V désigne la fonction de corrélation normalisée de la tension aléatoire de modulation.

Utilisons à présent les relations d'écrétage.

Usant de la même méthode que précédemment et utilisant l'expression (IV-13) nous obtenons, d'une part

$$(V-34) \quad q(n; T, \tau) = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n!} \frac{(2\langle n \rangle)^n}{(1 + 2\langle n \rangle)^{n+1}} \left(1 + 2 \frac{n - \langle n \rangle}{1 + 2\langle n \rangle} \gamma_V^2(\tau) \right)$$

et d'autre part

$$(V-35) \quad A_c(\tau) = 1 + 2 \cdot \frac{\langle n \rangle}{(1 + 2\langle n \rangle)^{3/2} [1 - (1 + 2\langle n \rangle)^{-1/2}]} \gamma_V^2(\tau)$$

On vérifie, naturellement, que pour $\langle n \rangle \rightarrow 0$, $A_c(\tau)$ tend vers $\gamma_I(\tau)$.

Examinons pour terminer le dernier cas particulier, le champ à double modulation Gaussienne.

V-1.b.3.δ) Champ à double modulation Gaussienne

Rappelons l'expression de l'intensité instantanée considérée en (IV-14)

$$(V-36) \quad I(t) = I_o(t) V^2(t)$$

Le calcul direct de $\gamma_I(\tau)$ aboutit à :

$$(V-37) \quad \gamma_I(\tau) = (1 + |\gamma_J(\tau)|^2) (1 + 2 \gamma_V^2(\tau))$$

où $\gamma_J(\tau)$ est la fonction de corrélation normalisée du champ pseudo-thermique d'intensité $I_o(t)$ et $\gamma_V(\tau)$ celle de la tension aléatoire de modulation $V(t)$.

Examinons à présent comment se développent les calculs d'écrétage.

Partant de (IV-26), on considère le cas particulier $n = 0$:

$$q(0; T, \tau) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{4\langle n \rangle}} (1 - \gamma_v^2(\tau))$$

$$\left\{ \left(\frac{2}{\langle n \rangle}\right)^{\frac{1}{4}} W_{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2\langle n \rangle}\right) + \frac{\gamma_v^2(\tau)}{2(1 - \gamma_v^2(\tau))} \left(\frac{2}{\langle n \rangle}\right)^{\frac{3}{4}} W_{-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2\langle n \rangle}\right) \right.$$

$$(V-38) \quad \left. - \frac{|\gamma_f(\tau)|^2}{2} \left(\frac{2}{\langle n \rangle}\right)^{\frac{1}{4}} W_{-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2\langle n \rangle}\right) - \frac{3}{2} \frac{\gamma_v^2(\tau) |\gamma_f(\tau)|^2}{1 - \gamma_v^2(\tau)} \left(\frac{2}{\langle n \rangle}\right)^{\frac{3}{4}} W_{-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2\langle n \rangle}\right) \right\}$$

$W_{\lambda, \nu}(z)$ sont les fonctions de Whittaker (58).

Par l'intermédiaire de (V-27), on en déduit $A_0(\tau)$.

L'expression finale reste assez compliquée et montre que la relation de $A_0(\tau)$

à $\gamma_I(\tau)$ n'est pas simplement inversable.

Comme précédemment, cherchons-en la limite lorsque $\langle n \rangle \rightarrow 0$.

Nous avons :

$$(V-39) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} W_{\lambda, \nu}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^{\lambda} \left(1 + \frac{\nu^2 - (\lambda - \frac{1}{2})^2}{z} \right)$$

ce qui nous permet de développer $q(0; T, \tau)$ au premier ordre en $\langle n \rangle$

$$(V-40) \quad q(0; T, \tau) \approx \frac{1 - \gamma_v^2(\tau)}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{2} (1 - \langle n \rangle) + \frac{\gamma_v^2(\tau)}{1 - \gamma_v^2(\tau)} \sqrt{2} (1 - 3\langle n \rangle) - \langle n \rangle \sqrt{2} |\gamma_f(\tau)|^2 \right.$$

$$\left. - \frac{|\gamma_f(\tau)|^2 \gamma_v^2}{1 - \gamma_v^2} 3\sqrt{2} \langle n \rangle \right\}$$

soit pour $A_0(\tau)$:

$$(V-41) \quad A_0(\tau) = \frac{1}{\langle n_0 \rangle} (1 - q(0; T, \tau)) = 1 + 2 \gamma_v^2(\tau) + |\gamma_f(\tau)|^2 + 2 \gamma_v^2(\tau) |\gamma_f(\tau)|^2$$

expression identique à celle écrite directement (V-37).

V-1.b.3.ε) Conclusions

Les calculs d'écrétage ci-dessus explicités dans quelques cas particuliers prouvent que la méthode d'écrétage à une dimension ne conduit pas toujours à la mesure de la fonction de corrélation d'intensité. Cependant, il faut noter que le résultat $A_0(\tau)$ est correct dans la mesure où l'on a, au préalable,

défini la statistique du champ étudié et dans la limite $\langle n \rangle$ petit.

Considérons maintenant le cas du double écrétage.

V-1.b.3.α') Double écrétage - relations générales

Traisons le cas particulier $k = 0$ où les calculs peuvent être assez simplement conduits pour les différents types de champ que nous connaissons.

Le problème consiste à étudier dans quelles conditions $A_{oo}(\tau)$ qui s'écrit :

$$(V-42) \quad A_{oo}(\tau) = \frac{\langle n_o(c) n_o(\tau) \rangle}{\langle n_o \rangle^2} = \frac{1}{\langle n_o \rangle^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} p_{T,\tau}(n, m)$$

s'exprime à l'aide de $\gamma_I(\tau)$

On remarque que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} p_{T,\tau}(n, m) = 1 - p_{T,\tau}(0, 0) + \sum_{m=1}^{\infty} p_{T,\tau}(0, m) + \sum_{n=1}^{\infty} p_{T,\tau}(n, 0)$$

or
$$\sum_{m=1}^{\infty} p_{T,\tau}(0, m) = p_T(0) - p_{T,\tau}(0, 0) \quad , \text{ soit}$$

$$(V-43) \quad A_o(\tau) = [1 - p_T(0)]^{-2} [1 - 2 p_T(0) + p_{T,\tau}(0, 0)]$$

où $p_T(n)$ est la probabilité de compter n photoélectrons dans l'intervalle $(\theta, \theta+T)$; T très petit devant le temps de cohérence et $p_{T,\tau}(n, m)$ la probabilité à deux dimensions de compter n photoélectrons dans $(\theta, \theta+T)$ et m photoélectrons dans $(\theta+T+\tau, \theta+2T+\tau)$.

Poursuivons la simplification de (V-43).

Connaissant la relation

$$(V-44) \quad p_{T,\tau}(n, m) = \frac{(-1)^{n+m}}{n! m!} \frac{\partial^n}{\partial s_1^n} \frac{\partial^m}{\partial s_2^m} Q_{T,\tau}(s_1, s_2) \Big|_{s_1=s_2=1}$$

il est facile de voir que

$$(V-45) \quad p_{T,\tau}(0, 0) = Q_{T,\tau}(1, 1)$$

relation très utile pour le calcul de (V-43).

Reprenons comme précédemment les divers cas de champ optique et essayons de voir dans quelles limites l'application de la formule (V-43) est susceptible de fournir la fonction de corrélation des fluctuations d'intensité.

V-1.b.3.β') Champ pseudo-thermique

Le calcul, ici, par rapport au précédent, fait intervenir la fonction génératrice $Q(s_1, s_2)$. Cette fonction a déjà été calculée dans le chapitre 3, rappelons- en l'expression.

$$(V-46) \quad Q(s_1, s_2) = \left[1 + \langle n_1 \rangle s_1 + \langle n_2 \rangle s_2 + \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle s_1 s_2 (1 - |\gamma_z(\tau)|^2) \right]^{-1}$$

ce qui nous permet d'obtenir $p_{T,\tau}(0,0)$.

Dès lors, $A_{oo}(\tau)$ s'écrit

$$(V-47) \quad A_{oo}(\tau) = \left(1 + \frac{1 - \langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} |\gamma_z(\tau)|^2 \right) \left(1 - \left(\frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} \right)^2 |\gamma_z(\tau)|^2 \right)^{-1}$$

On remarque que $A_{oo}(\tau)$ n'est égal à $1 + |\gamma_z(\tau)|^2$ qu'à la limite $\langle n \rangle \rightarrow 0$.

V-1.b.3.γ') Champ Gaussien réel

On utilise les expressions démontrées par B. Picinbono et M. Rousseau ⁽⁴⁵⁾ pour ce type de lumière :

$$(V-48) \quad p_T(v) = (1 + 2\langle n \rangle)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(V-49) \quad p_{T,\tau}(v,v) = \left[1 + 4\langle n \rangle + 4\langle n \rangle^2 (1 - \gamma_v^2(\tau)) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

que l'on porte dans (V-20).

Le résultat final s'écrit alors :

$$(V-50) \quad A_{oo}(\tau) = 1 + \frac{1}{2(1 + \langle n \rangle - \sqrt{1 + 2\langle n \rangle})} \left\{ \left[1 - \left(\frac{2\langle n \rangle \gamma_v(\tau)}{1 + 2\langle n \rangle} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - 1 \right\}$$

Nous vérifions aux limites $\langle n \rangle \gg 1$ $A_0(\tau) \rightarrow 1$
 $\langle n \rangle \ll 1$ $A_0(\tau) \rightarrow 1 + 2|\gamma_V(\tau)|^2$

la validité de (V-50).

V-1.b.3.δ') Champ à double modulation Gaussienne

Nous partons de la définition de l'intensité instantanée

$$(V-51) \quad I(t) = I_c(t) V^2(t)$$

Le calcul direct de $\gamma_I(\tau)$ a déjà été rappelé dans (V-37).

Intéressons-nous maintenant au calcul de $A_{00}(\tau)$.

La loi $p_T(n)$ des comptages à une dimensions a été établie dans le chapitre précédent (équation IV-21) ; appliquons-la au cas $n = 0$

$$(V-52) \quad p_T(0) = \frac{1}{\sqrt{\langle n \rangle}} e^{-\frac{1}{4\langle n \rangle}} D_{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\langle n \rangle}}\right)$$

La loi à deux dimensions qui intervient dans le calcul de $A_{00}(\tau)$ est plus délicate à écrire. En effet, l'expression à calculer est :

$$(V-53) \quad Q(1,1) = p(0,0) = \langle e^{-T(I_1 + I_2)} \rangle$$

où I_1 et I_2 désignent l'intensité (V-51) prise à deux instants différents.

Ecrivons $Q(1,1)$ conditionnelle à V . Utilisons pour cela, le résultat (III-16).

$$(V-54) \quad Q(1,1)_{V_1, V_2} = \left[1 + \langle j \rangle^T (V_1^2 + V_2^2) + T^2 \langle j \rangle^2 V_1^2 V_2^2 (1 - |\gamma_j(\tau)|^2) \right]^{-1}$$

où $\langle j \rangle$ est la valeur moyenne de l'intensité $I_0(t)$ d'où

$$(V-55) \quad Q(1,1) = \frac{1}{2\pi\sigma_V^2\sqrt{1-\gamma_V^2(\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{V_1^2 + V_2^2 - 2\gamma_V V_1 V_2}{2\sigma_V^2(1-\gamma_V^2)}}}{1 + \langle j \rangle^T (V_1^2 + V_2^2) + T^2 \langle j \rangle^2 V_1^2 V_2^2 (1 - |\gamma_j|^2)} dV_1 dV_2$$

dans le cas général cette expression est difficile à calculer.

On s'intéresse alors au cas particulier correspondant à notre situation expérimentale : les fluctuations de $V(t)$ sont très lentement variables devant celles de $I_0(t)$ ($\gamma_V \approx 1$).

On a alors à calculer :

$$(V-56) \quad Q(1,1) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{V^2}{2\sigma^2}}}{1 + 2T\langle j \rangle + T^2\langle j \rangle^2 V^4 (1 - |\gamma_j(t)|^2)} dV$$

Posons $\langle j \rangle + T\sigma^2 = \langle n \rangle$, σ^2 étant la variance de V.

L'expression toute intégrée de $Q(1, 1)$ s'écrit alors :

$$(V-57) \quad Q(1,1) = \frac{\langle n \rangle^{-\frac{1}{4}}}{2^{\frac{3}{4}} |\gamma_j(t)|} \left\{ \left(\frac{1}{1+|\gamma_j|} \right)^{-\frac{3}{4}} e^{\frac{1}{4\langle n \rangle(1+|\gamma_j|)}} W_{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2\langle n \rangle(1+|\gamma_j|)} \right) - \left(\frac{1}{1-|\gamma_j|} \right)^{-\frac{3}{4}} e^{\frac{1}{4\langle n \rangle(1-|\gamma_j|)}} W_{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2\langle n \rangle(1-|\gamma_j|)} \right) \right\}$$

Cherchons la limite de $Q(1, 1)$ pour $\langle n \rangle \rightarrow 0$ en utilisant le développement du 2ème ordre en $\langle n \rangle$ de $W_{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}}(X)$

On a

$$(V-58) \quad W_{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2\langle n \rangle(1+|\gamma_j|)} \right) \sim e^{-\frac{1}{4\langle n \rangle(1+|\gamma_j|)}} \left(\frac{1}{2\langle n \rangle(1+|\gamma_j|)} \right)^{-\frac{1}{4}} \left[1 - \langle n \rangle(1+|\gamma_j|) + 3\langle n \rangle^2(1+|\gamma_j|)^2 \right]$$

et un développement analogue pour $W_{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2\langle n \rangle(1-|\gamma_j|)} \right)$.

On arrive ainsi pour $\lim_{\langle n \rangle \rightarrow 0} Q(1, 1)$ au résultat final

$$(V-59) \quad p(0,0) = Q(1,1) = 1 - 2\langle n \rangle + 3\langle n \rangle^2 (3 + |\gamma_j|^2)$$

$\langle n \rangle \rightarrow 0 \quad \quad \quad \langle n \rangle \rightarrow 0$

Il nous faut opérer la limite $\langle n \rangle \rightarrow 0$ sur $p_T(0)$ calculée en (V-52).

Le développement asymptotique de $D_p(z)$ est donné dans la référence (25) p.1064.

soit pour $D_{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\langle n \rangle}} \right)$

$$(V-60) \quad D_{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\langle n \rangle}} \right) \sim \sqrt{\langle n \rangle} e^{-\frac{1}{4\langle n \rangle}} (1 - \langle n \rangle + 3\langle n \rangle^2)$$

soit finalement

$$(V-61) \quad p_T(0) \approx 1 - \langle n \rangle + 3\langle n \rangle^2$$

$\langle n \rangle \rightarrow 0$

Nous sommes alors en mesure d'obtenir $A_{oo}(\tau)$ pour $\langle n \rangle \rightarrow 0$.

Nous trouvons :

$$(V-62) \quad A_{oo}(\tau) = 3 (1 + |\gamma_j(\tau)|^2)$$

qui est bien l'expression attendue (cf. équation V-37) avec $\gamma_V = 1$).

Si maintenant nous faisons $|\gamma_j| = 1$ et γ_V quelconque, nous obtiendrons toujours pour $\langle n \rangle \rightarrow 0$

$$(V-63) \quad A_{oo}(\tau) = 2 (1 + \gamma_V^2(\tau))$$

V-1.b.3.ε') Conclusions

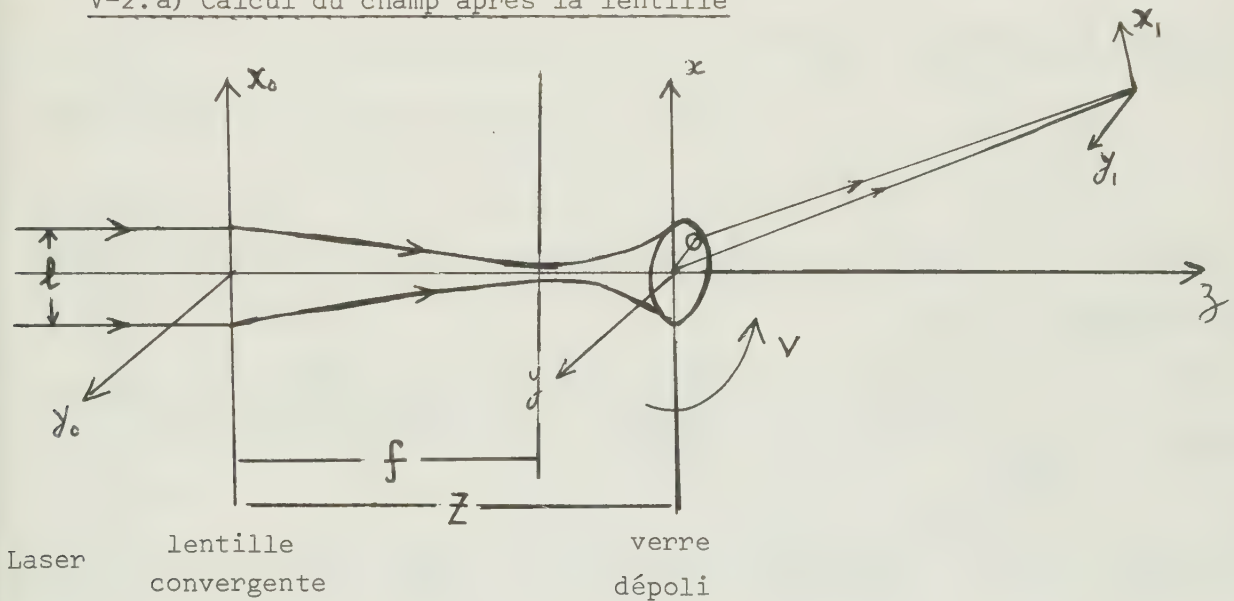
Ces calculs développés à propos des comptages écrétés montrent qu'en général, la relation entre les lois des comptages écrétés et la fonction de corrélation d'intensité n'est pas simple. L'étude suivant les divers champs optiques, illustre l'importance qu'il faut accorder à la statistique du champ étudié et montre surtout que l'intérêt expérimental constitué par la simplicité de la méthode par écrétagé, est largement compensé par les difficultés d'interprétation des résultats en termes de corrélation d'intensité.

V-2. Nature de la fonction de corrélation de l'intensité Laser diffusée par verre dépoli.

Après avoir vu au cours du chapitre 3, que l'on pouvait, avec une très bonne approximation, admettre le caractère Gaussien du champ diffusé par le verre dépoli, nous nous intéressons, dans ce paragraphe, à la fonction de corrélation des fluctuations de cette intensité.

Nous nous placerons, en vue d'une étude théorique simplifiée, dans les conditions expérimentales, c'est-à-dire dans le cas où le verre dépoli reçoit le faisceau laser rendu convergent par une lentille, supposée sans défaut. Nous commencerons donc par calculer le profil spatial du faisceau incident après la lentille et ce en utilisant les lois habituelles de la diffraction, puis nous étudierons brièvement la statistique introduite par le verre dépoli.

V-2.a) Calcul du champ après la lentille



Utilisant les approximations de la théorie de la diffraction, nous pouvons écrire le champ électrique sur le verre dépoli par l'intégrale de Fresnel

$$(V-64) \quad E(x, y) = \frac{-ik}{2\pi z} \iint E(x_0, y_0) e^{ik\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}} dx_0 dy_0$$

$E(x_0, y_0)$ est le champ lumineux à la sortie du laser.

On admet généralement que le profil spatial d'une section droite du faisceau laser est Gaussien (59).

Avant la lentille :

$$(V-65) \quad E(x_0, y_0) = E_l e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{x_0^2 + y_0^2}{2l^2}}$$

L'onde plane fournie par le laser est devenue sphérique après focalisation par la lentille convergente ; celle-ci, introduit seulement une phase de sorte , qu'après la lentille, on peut écrire :

$$\bar{E}(x_0, y_0) = E_l e^{i\omega_0 t} e^{-\left(\frac{ik}{f} + \frac{1}{l^2}\right) \left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{2}\right)}$$

que l'on porte dans (V-64) ; il vient alors :

$$(V-66) \quad E(x, y) = \frac{-ik E_l e^{i\omega_0 t} e^{ikz}}{2\pi z} \iint e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{ik}{f} + \frac{1}{l^2}\right) (x_0^2 + y_0^2) + \frac{ik}{2z} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} dx_0 dy_0$$

Expression dans laquelle nous avons fait l'approximation

$$[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2]^{1/2} \approx z + \frac{(x-x_0)^2}{2z} + \frac{(y-y_0)^2}{2z}$$

L'intégrale (V-66) peut se calculer en élargissant jusqu'à l'infini les bornes d'intégration. On trouve :

$$(V-67) \quad E(x, y) = F(k, z, l) e^{i(kz + \omega_0 t)} e^{-\frac{1}{2z} \left[\frac{k^2}{f} - \frac{ik}{l^2} \right] (x^2 + y^2)}$$

Calculons à présent l'intensité $I(x, y) = E^*(x, y) E(x, y)$ en posant $x^2 + y^2 =$

$$(V-68) \quad I(r) \simeq I_0(k, f, l) e^{-\frac{k^2 r^2}{f^2 l^2 \left[\frac{1}{l^4} + k^2 \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z} \right)^2 \right]}} = I_0 e^{-\frac{A}{D}}$$

avec l'approximation valable dans nos conditions expérimentales : $z-f = \epsilon$. On a posé $A = \frac{k^2}{f l^2}$ et $D = \frac{1}{l^4} + \frac{k^2 \epsilon^2}{f^4}$.

Le profil spatial n'est donc pas changé par la lentille.

V-2.b) Statistique du verre dépoli

Le verre dépoli reçoit l'intensité que l'on vient de calculer et chaque grain va diffuser une intensité fonction uniquement de la position r . Supposons que tous les grains soient sphériques et de diamètre très petit devant les dimensions linéaires du faisceau incident.

Soit $\Gamma_Z(\vec{k}, t)$ la transformée de Fourier de la fonction de corrélation spatiale $\Gamma_Z(\vec{r}, t)$ du champ diffusé dans la direction $\vec{k}$.

$$(V-69) \quad \Gamma_Z(\vec{k}, t) = \int d\vec{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \Gamma_Z(\vec{r}, t)$$

Les grains de verre dépoli étant supposés indépendants et tous de même forme, la fonction de corrélation à une particule sera

$$(V-70) \quad G(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r} - \vec{v}t)$$

où v est la vitesse linéaire de déplacement du grain considéré.

Chaque grain reçoit l'intensité $I(\vec{r})$; de sorte que ;

$$(V-71) \quad \Gamma_Z(\vec{r}, t) = I(\vec{r}) G(\vec{r}, t) = I(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{v}t)$$

De (V-68) et (V-69) nous pouvons déduire alors :

$$(V-72) \quad \Gamma_Z(\vec{k}, t) = I_0 \int e^{-\frac{A}{Df} r^2} \delta(\vec{r} - \vec{v}t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r}$$

Soit encore

$$(V-73) \quad \Gamma_Z(\vec{k}, t) = I_0 e^{-\frac{t^2}{2T_c^2} - i\vec{k} \cdot \vec{v}t}$$

où

$$(V-74) \quad T_c(z) = \frac{f}{2\ell k v \sqrt{2}} \left(1 + \frac{z}{f} \right)$$

Un raisonnement faisant intervenir la moyenne statistique d'ensemble des champs diffusés par les grains du verre recevant un faisceau parallèle obtient quant à l'allure de $\Gamma_Z(\vec{k}, t)$ un résultat analogue à (V-73)⁽⁵²⁾. Il fait apparaître, en

plus, le champ comme un effet de grenaille pur spatial. La fonction de corrélation est alors reliée à la distribution d'intensité lumineuse dans une section du faisceau du laser.

Le vecteur vitesse est maintenu orthogonal au vecteur diffusion ($\vec{k} \cdot \vec{v} = 0$), nous obtenons le résultat final

$$(V-75) \quad \Gamma_z(\vec{k}, t) = I_0 e^{-\frac{t^2}{2\tau_c^2}}$$

On remarque que le profil Gaussien de la fonction de corrélation est directement lié au profil Gaussien de $I(\vec{r})$.

Le calcul du temps de corrélation τ_c de l'intensité s'achève alors très simplement en utilisant la relation

$$(V-76) \quad \Gamma_z(\vec{k}, t) = I_0^2 [1 + |\Gamma_z(\vec{k}, t)|^2]$$

Appelons Δv la largeur de raie du spectre des fluctuations de l'intensité

$$(V-77) \quad \Delta v(z) = \frac{lv}{\lambda f} \left(3 - \frac{z}{f} \right)$$

On peut définir également Δv_m la largeur de raie à mi-hauteur ; on obtient alors le résultat couramment admis ⁽¹⁹⁾

$$(V-78) \quad \Delta v_m(f) = \sqrt{2 \log 2} \frac{2vl}{\lambda f}$$

C'est cette formule que nous allons vérifier expérimentalement et étudier chaque paramètre (v , f) dans le prochain paragraphe.

V-3. Résultats expérimentaux

Nous étudions trois méthodes de mesure de fonction de corrélation temporelle de fluctuations d'intensité puis nous analysons plus spécialement, à l'aide de l'une d'entre elles, les différents paramètres qui interviennent dans le temps de corrélation des fluctuations de l'intensité de la source pseudo-thermique.

Les méthodes utilisées sont celles décrites en (V-1.a.3.) à l'aide de deux détecteurs et d'un CTA, d'une part, et en (V-1.b.1.) à l'aide d'un détecteur et de l'échelle de comptages, d'autre part.

Les courbes des figure 1 et 2(a) représentent respectivement les variations de $G(T)$ et en coordonnées semi-logarithmiques l'allure obtenue pour $\gamma_I(T)$. Cette méthode où l'on déduit $\gamma_I(T)$ par des opérations numériques (calcul de la dérivée seconde en chaque point de $G(T)$; recherche d'une courbe algébrique passant au mieux par les points expérimentaux de $G(T)$ s'est révélée peu précise dans les résultats obtenus. Elle présente, toutefois, l'avantage d'assurer que pendant la mesure de chaque $p(n, T)$ la source reste stable.

La courbe de la figure 2(b) représente en coordonnées semi-logarithmiques l'allure de la fonction de corrélation $\gamma_I(\tau)$ à une vitesse de rotation du disque différente de celle utilisée précédemment et obtenue par la méthode des comptages déclenchés retardés. Les points expérimentaux s'écartent peu d'une gaussienne $e^{-\frac{\tau^2}{\tau_c^2}}$ avec $\tau_c \approx 35 \mu s$. Là, également chaque point de $I(\tau)$, déduit de $q(0, T, \tau)$ s'obtient après un temps de stockage assez bref ($\approx 120 s$), ce qui assure de la stabilité de la source. La durée totale de l'expérience est inférieure à $\frac{1}{2}$ heure, mais la précision de la méthode n'est pas suffisante surtout en ce qui concerne le voisinage immédiat de l'origine.

La dernière méthode que nous ayons employée, si elle nécessite un appareillage plus important et un temps de stockage long ($> \frac{1}{2}$ heure), s'est affirmée la plus précise.

Nous vérifions, aux erreurs d'expérience près (temps de résolution fini et

efficacité quantique des détecteurs) l'effet de groupement. Nous trouvons

$$h \approx \frac{1,5 \cdot 10^4}{8,25 \cdot 10^3} = 1,82.$$

Puis nous vérifions également qu'il y a peu d'écart entre les points expérimentaux et la courbe théorique tracée à $\tau_c \approx 5,2$ s.

C'est par cette méthode que nous avons étudié la loi (V-78) de variation de $\frac{1}{\tau_c}$ en fonction de la vitesse de rotation du disque de verre dépoli, et de la distance focale f de la lentille convergente placée devant le verre dépoli.

La figure 4 représente en coordonnées linéaires Δv en fonction de v en

La courbe théorique déduite de nos calculs avec $\ell = 1,2$ mm, la droite tracée en traits pleins. L'accord est convenable.

Sur la figure 4 remarquons que l'extrapolation de la droite coupe l'axe des Δv à $\Delta v_0 \approx 20$ kHz à $V \rightarrow 0$. Cette valeur à l'origine constitue une valeur approximative de la largeur de raie du spectre des fluctuations d'intensité du laser. Enfin, la figure 5 montre en coordonnées linéaires la variation de τ_c exprimé en μs en fonction de f en cm. La courbe déduite de la relation (V-78) est la droite tracée avec $\ell \approx 1,2$ mm et $v \approx 17 \times 2\pi$ cm/s. La dispersion des points est due aux erreurs de mesure des différentes focales des lentilles.

Notons pour terminer, que les expériences portant sur l'étude de τ_c en fonction de ℓ , ne se sont pas avérées très concluantes.

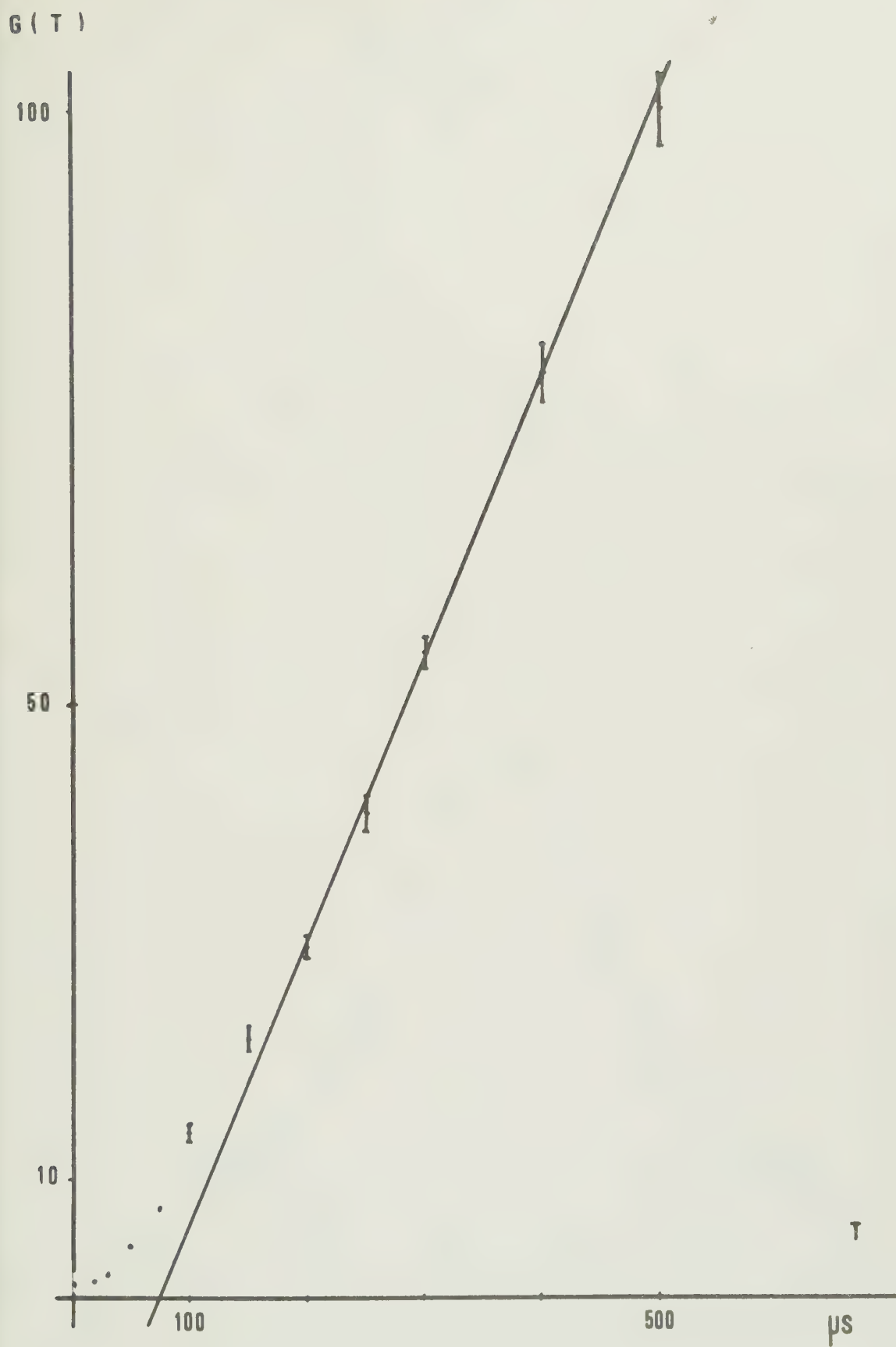


Fig. 1- Variation de $G(T) = \langle n^2 \rangle_T - \langle n \rangle_T^2$ en fonction de T ,

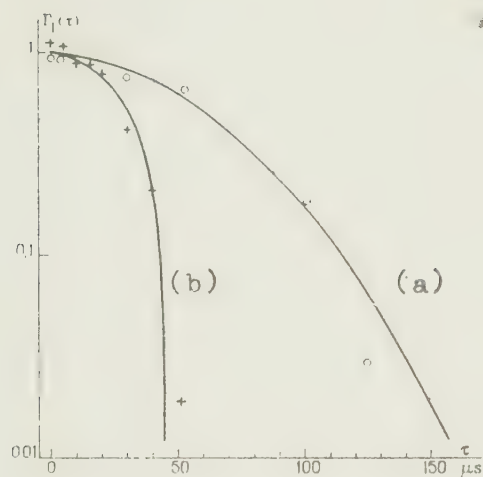


Fig. 2. — Fonction de corrélation obtenue par comptages.
Source « pseudo-thermique ».

○ ○ ○ ○ À partir des $\langle n^{(2)} \rangle_T$; ——— Loi gaussienne avec $\tau_c \approx 75 \mu s$;
+ + + + » » $q_T(n, \theta)$; ——— » » » $\tau_c \approx 35 \mu s$.

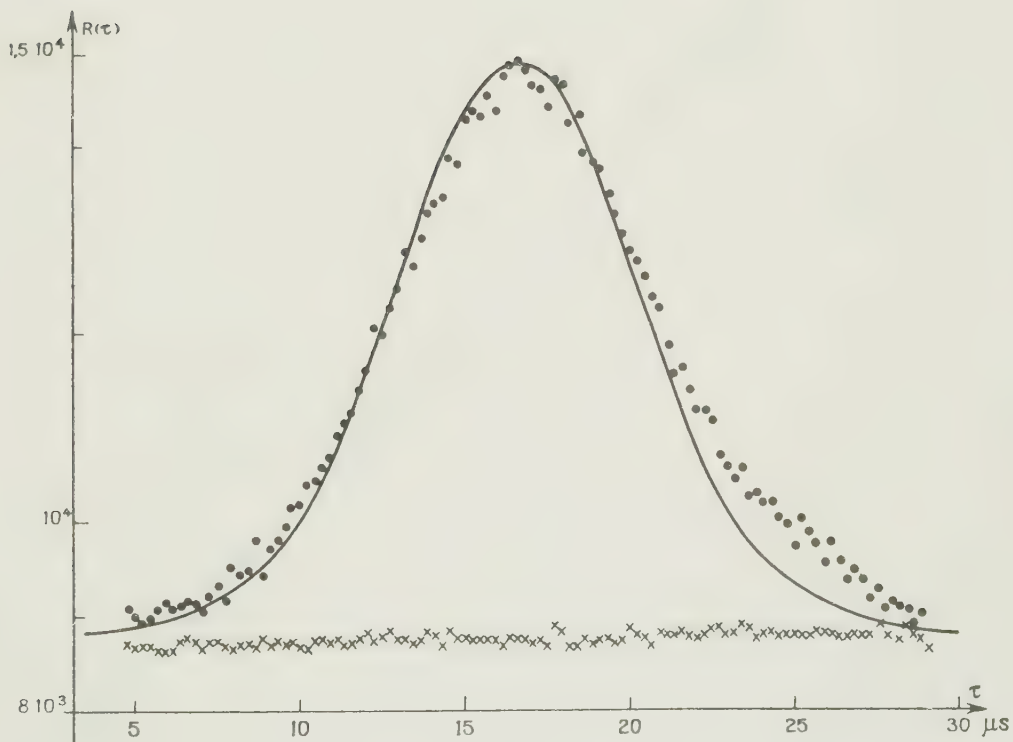


Fig. 3 — Fonction de corrélation obtenue par la méthode du CTA.

..... Verre dépoli tournant ; source « pseudo-thermique »;
× × × × » - » fixe : laser monomode.
———— Loi gaussienne avec $\tau_c \approx 5,2 \mu s$.

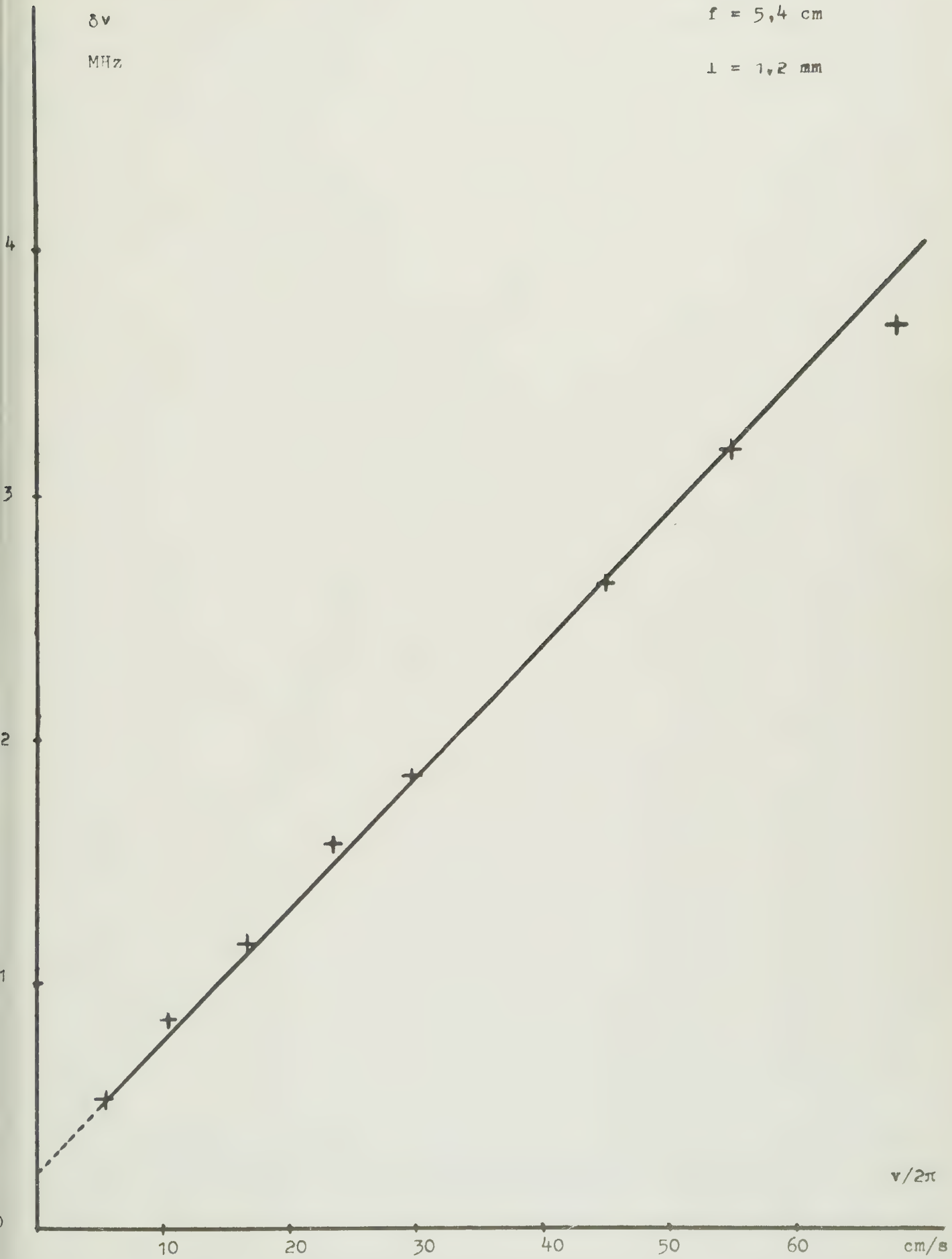
Fig. 4

δv

MHz

$f = 5,4 \text{ cm}$

$l = 1,2 \text{ mm}$



$v \neq 17 \times 2\pi \text{ cm/s}$

$l \neq 1,2 \text{ mm}$

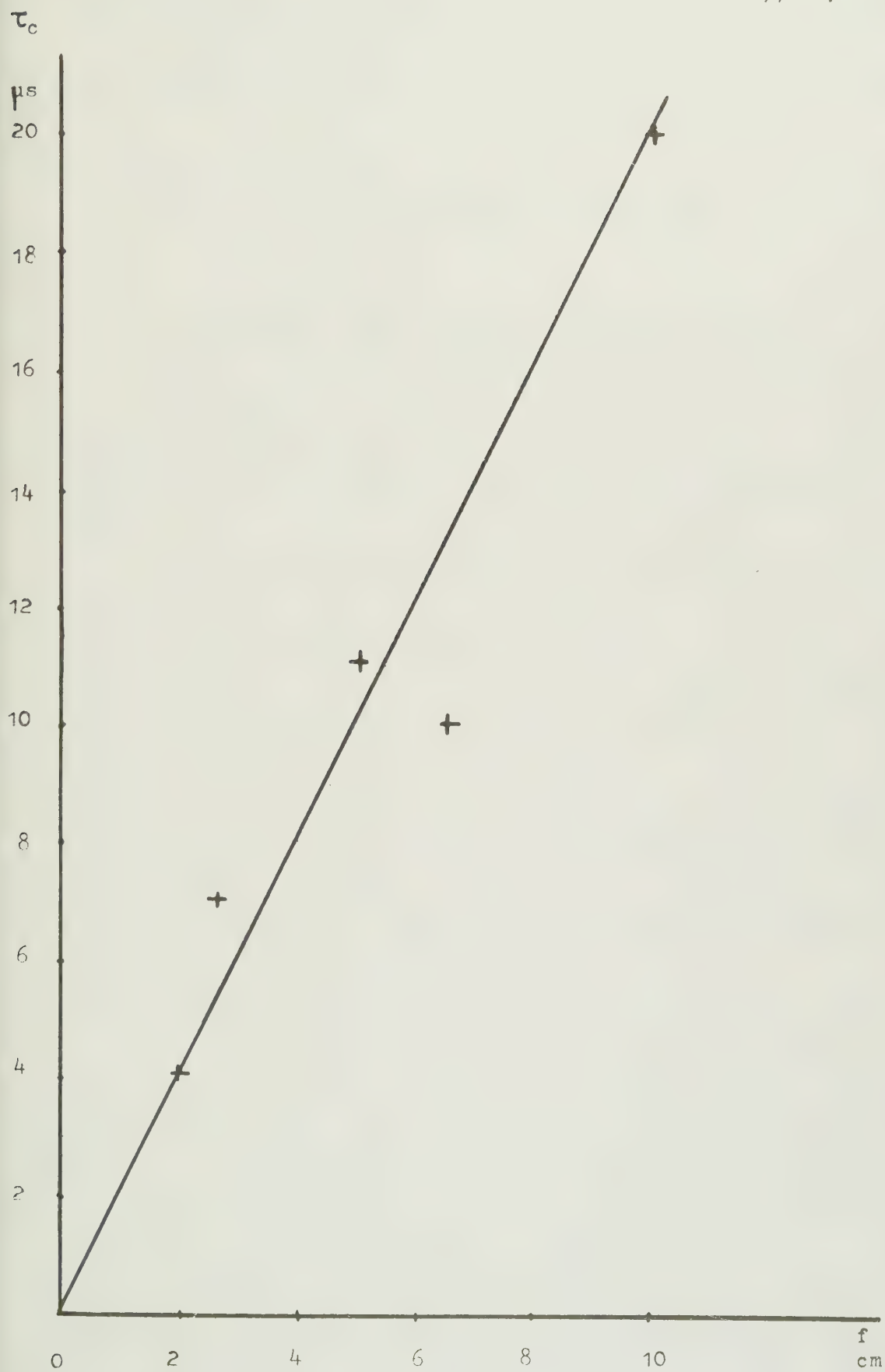


Fig. 5

CHAPITRE VI

Etude des intervalles multiples

On sait qu'on peut définir et étudier un processus ponctuel soit par le moyen des comptages et multicomptages, soit par l'étude des intervalles entre évènements, successifs ou non. La question des intervalles entre évènements successifs a déjà été examinée dans les chapitres précédents à propos de l'étude des temps de vie et d'attente résiduelle.

A notre connaissance, l'étude des intervalles multiples, c'est-à-dire des intervalles entre évènements non successifs, a été très peu abordée dans le domaine de l'Optique Statistique, tant sur le plan théorique qu'expérimental. Elle présente pourtant un intérêt aussi grand que l'étude des comptages à laquelle on peut d'ailleurs la relier comme nous le verrons. En particulier, elle permet de mieux mettre en évidence l'influence de la fonction de corrélation de l'intensité lumineuse. De plus, les lois limites pour des intervalles d'ordre élevé posent d'intéressants problèmes de calcul des probabilités dans l'addition des variables aléatoires corrélées.

Dans le premier paragraphe, nous établissons l'équation générale reliant les lois des intervalles multiples et celles des comptages relaxés. La résolution de cette équation n'est en général pas très commode si l'on n'a pas explicité la statistique du champ à l'origine du processus de détection des photoélectrons. C'est ce que nous faisons dans les paragraphes ultérieurs. Nous déterminons d'abord des expressions exactes pour différentes statistiques mais en supposant le temps de corrélation des fluctuations d'intensité très grand. Nous développons ensuite des méthodes de calcul numérique en nous affranchissant de cette condi-

tion. Nos résultats sont donc à la fois obtenus par calculs sur ordinateur et par mesures expérimentales à l'aide du dispositif décrit dans le chapitre II.

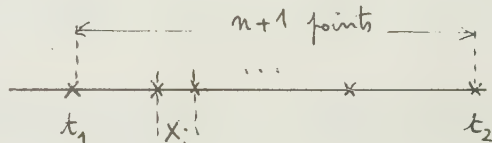
VI-1. Lois de probabilité des intervalles multiples. Relations générales.

Nous introduisons, tout d'abord, des relations valables indépendamment de toute hypothèse sur la statistique du champ.

VI-1.a) Loi du temps de vie d'ordre n

Soit $W_n(t_1|t_2)$ la densité de probabilité de détecter un photoélectron à l'instant t_2 conditionnellement à la détection d'un photoélectron à l'instant t_1 antérieur, et à la détection de n photoélectrons dans l'intervalle (t_1, t_2) .

Une autre définition constructive de $W_n(t_1|t_2)$ consiste à introduire

$$(VI-1) \quad t_2 - t_1 = \sum_{i=0}^n X_i$$


et $W_n(t_2 - t_1)$ comme la densité de probabilité de la somme de $n + 1$ variables aléatoires corrélées.

Ecrivons d'abord $W_n(t_1|t_2)$ de façon formelle, par une relation de récurrence avec la loi des comptages $p(n; t_1, t_2)$.

D'après l'expression (I-42) nous avons :

$$(VI-2) \quad W_n(t_1|t_2) = \frac{1}{n! \langle I \rangle} \left\langle I(t_1) \left(\int_{t_1}^{t_2} I(\theta) d\theta \right)^n \cdot I(t_2) \cdot e^{-\int_{t_1}^{t_2} I(\theta) d\theta} \right\rangle$$

D'autre part, d'après (I-35) et (I-37)

$$(VI-3) \quad p(n; t_1, t_2) = \frac{1}{n!} \left\langle \left(\int_{t_1}^{t_2} I(\theta) d\theta \right)^n e^{-\int_{t_1}^{t_2} I(\theta) d\theta} \right\rangle$$

En utilisant les égalités

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \left(\int_{t_1}^{t_2} I(\theta) d\theta \right) = I(t_2)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \left(\int_{t_1}^{t_2} I(\theta) d\theta \right) = -I(t_1)$$

nous remarquons qu'il existe une relation entre la dérivée seconde de

$p(n; t_1, t_2)$ et $W_n(t_1|t_2)$; nous intéressant ici, à des phénomènes stationnaires

les lois ne seront, en fait, fonctions que de la différence $t_2 - t_1$. A partir de (VI-2) et (VI-3), nous obtenons les relations suivantes dans lesquelles pour simplifier l'écriture, nous faisons $t_1 = 0$ et $t_2 = t$,

$$(VI-4) \quad \frac{d}{dt} p(n, t) = \frac{1}{(n-1)!} \langle I(t) \left(\int_0^t I(\theta) d\theta \right)^{n-1} e^{-\int_0^t I(\theta) d\theta} \rangle - \frac{1}{n!} \langle I(t) \left(\int_0^t I(\theta) d\theta \right)^n e^{-\int_0^t I(\theta) d\theta} \rangle$$

$$(VI-5) \quad \frac{d^2}{dt^2} p(n, t) = \langle I \rangle \left\{ W_n(0|t) - 2W_{n-1}(0|t) + W_{n-2}(0|t) \right\}$$

Cette dernière équation constitue la relation de récurrence cherchée ($n \geq 2$), analogue du résultat obtenu suivant une autre méthode par Mc Fadden ⁽³⁴⁾

Pour $n = 0$, la relation s'écrit :

$$(VI-6) \quad \frac{d^2}{dt^2} p(0, t) = \langle I \rangle W_0(0|t)$$

et pour $n = 1$, nous avons

$$(VI-7) \quad \frac{d^2}{dt^2} p(1, t) = \langle I \rangle [W_1(0|t) - 2W_0(0|t)]$$

La relation (VI-5) définit $W_n(0|t)$ suivant

$$(VI-8) \quad W_n(0|t) = \frac{1}{\langle I \rangle} \left\{ \sum_{m=0}^n \sum_{\ell=0}^m \frac{d^2}{dt^2} p(\ell, t) \right\}$$

qu'on établit simplement en développant la récurrence (VI-5) et en utilisant la relation intermédiaire :

$$\sum_{\ell=0}^m \frac{d^2}{dt^2} p(\ell, t) = W_m(0|t) - W_{m-1}(0|t)$$

VI-1.b) Loi du temps d'attente résiduelle d'ordre n

Soit $W_n(t)$ la densité de probabilité de détecter : un photoélectron à l'instant t et n photoélectrons dans l'intervalle $(0, t)$; l'origine 0 de l'axe des temps étant fixe mais arbitraire.

D'après (I-43), nous pouvons écrire :

$$(VI-9) \quad W_n(t) = \frac{1}{n!} \langle I(t) \cdot \left(\int_0^t I(\theta) d\theta \right)^n e^{-\int_0^t I(\theta) d\theta} \rangle$$

En opérant de la même manière que précédemment, on obtient :

$$(VI-10) \quad \frac{dp(n,t)}{dt} = W_{n-1}(t) - W_n(t)$$

relation de récurrence qui permet le calcul de $W_n(t)$ par :

$$(VI-11) \quad W_n(t) = - \sum_{\ell=0}^n \frac{d}{dt} p(\ell, t)$$

En fait, parce que l'intensité intervient dans toutes ces expressions par son intégrale dans le temps, le calcul des expressions (VI-2) et (VI-9) est généralement délicat sauf dans quelques cas particuliers que nous allons d'abord considérer.

VI-2. Intervalles multiples en présence de fluctuations d'intensité très lentes.

Le temps de corrélation de l'intensité étant très long devant l'intervalle de mesure $t_2 - t_1$, les relations (VI-2) et (VI-9) se simplifient respectivement en :

$$(VI-12) \quad W_n(0|t) = \frac{t^n}{n! \langle I \rangle} \int_0^\infty I^{n+1} e^{-It} p(I) dI$$

$$(VI-13) \quad W_n(t) = \frac{t^n}{n!} \int_0^\infty I^{n+1} e^{-It} p(I) dI$$

où $p(I)$ est la densité de probabilité de l'intensité lumineuse à $\tau_c \gg t$.

L'examen des formules (VI-12) et (I-35) nous montre immédiatement que l'on a :

$$(VI-14) \quad W_n(0|t) = \frac{(n+1)(n+2)}{\langle I \rangle t^2} p_t(n+2)$$

On remarque également que :

$$(VI-15) \quad W_n(t) = \frac{n+1}{t} p_t(n+1)$$

Ces deux dernières relations nous permettent d'étudier très simplement les densités de probabilité des intervalles multiples dans les divers cas de champs optiques déjà signalés plus haut.

En fait, nous limiterons notre travail, dans toute la suite, à $W_n(0|t)$.

VI- 2.a) Laser monomode stabilisé en amplitude

On obtient à partir de (III-1) que l'on porte dans (VI-14)

$$(VI-16) \quad W_n(0|t) = \langle I \rangle \frac{(\langle I \rangle t)^n}{n!} e^{-\langle I \rangle t}$$

Egalité que l'on vérifie expérimentalement sur un exemple de la figure 1 avec, comme paramètres : $\langle I \rangle = 5.10^5$ c/s et $n = 3$.

Lorsque n tend vers de grandes valeurs, on sait que (VI-16) prend, après norma-

lisation, une forme Gaussienne, en vertu du théorème de la limite centrale (les intervalles étant indépendants et de même loi exponentielle).

Résultat important que l'on vérifie convenablement par l'expérience sur la figure 2 avec $\langle I \rangle = 5,5 \cdot 10^6$ c/s et $n = 63$.

VI- 2.b) Champ pseudo-thermique

Le calcul de $W_n(0|t)$ s'effectue à partir de (VI-14) et de (III-6) on obtient :

$$(VI-17) \quad W_n(0|t) = (n+1)(n+2) \langle I \rangle \frac{(\langle I \rangle t)^n}{(1+\langle I \rangle t)^{n+3}}$$

Une vérification expérimentale de $W_n(0|t)$ pour $n = 3$, $\langle I \rangle = 5 \cdot 10^5$ c/s est donnée sur la figure 1.

VI- 2.c) Champ Gaussien réel

On déduit l'expression de $W_n(0|t)$ de celle établie au chapitre IV pour $p_T(n)$ (cf. equation IV-3) et à l'aide de (VI-14) ; on a le résultat

$$(VI-18) \quad W_n(0|t) = \frac{(2n+3)!!}{n! 2^{n+5/2}} \langle I \rangle^{-3/2} \frac{t^n}{\left(t + \frac{1}{2\langle I \rangle}\right)^{n+5/2}}$$

La courbe (r-G) de la figure 1 en représente un exemple expérimental pour $n = 3$ et $\langle I \rangle = 5 \cdot 10^5$ c/s.

VI- 2.d) Champ à double modulation Gaussienne

Par application des équations (IV-21) et (VI-14), nous aboutissons à l'expression de $W_n(0|t)$:

$$(VI-19) \quad W_n(0|t) = \frac{(2n+4)!}{n! 2^{n+2}} \exp \frac{1}{4\langle I \rangle t} \langle I \rangle^{-3/2} t^{-5/2} D_{-(2n+5)} \left(\frac{1}{\sqrt{\langle I \rangle t}} \right)$$

expression dans laquelle $D_\ell(x)$ est la fonction parabolique cylindrique déjà rencontrée dans le chapitre IV (equation IV-21).

Nous pouvons également, à titre de vérification de nos calculs, un exemple

expérimental de $W_n(0|t)$ pour $\langle I \rangle = 5.10^5$ c/s et $n = 3$ sur la courbe de la figure 1.

VI-2.e) Conclusions

On remarque que toutes les courbes de $W_n(0|t)$ de la figure 1, admettent un maximum et que les abscisses de ces maxima se placent, par rapport aux effets de groupement respectifs, dans l'ordre décroissant.

Le résultat peut s'interpréter de la façon suivante :

Plus l'effet de groupement est élevé, plus les intervalles successifs sont corrélés et moins la loi de $W_n(0|t)$ a tendance à se rapprocher d'une courbe de Gauss.

Les cas que nous venons d'aborder n'ont pas un grand intérêt expérimental car ils ne permettent pas une étude à n élevé. En effet, les intensités lumineuses que l'on obtient par modulation sont, en raison de l'atténuation par les polariseurs, assez faibles.

Le seul cas, en dehors du laser, où l'expérience soit possible à intensité relativement importante, est celui du champ pseudo-thermique, pour lequel une étude générale (t , τ_c , et n quelconques) est faite dans le paragraphe qui suit.

VI- 3 . Exemple d'étude sans condition sur les fluctuations d'intensité :

VI- 3. a) Formulation du problème

Nous nous limiterons, dans ce paragraphe, à la seule étude de $W_n(0|t)$ mais par contre nous n'imposerons aucune condition aux différentes valeurs des temps qui interviennent dans les calculs. Nous aurons donc pour but à la fois le calcul théorique de la densité de probabilité $W_n(0|t)$ dans le cas le plus général, et la vérification expérimentale de ces résultats.

La relation (VI-2) de définition de $W_n(0|t)$ reste toujours valable mais, ne pouvant plus considérer l'intervalle $t_2 - t_1$ comme petit devant le temps de corrélation des fluctuations de l'intensité, le calcul de $p(I)$ où

$$(VI-20) \quad I(t) = \int_u^{u+t} |Z(\theta)|^2 d\theta$$

s'avère nécessaire.

Cependant, dans toute cette étude générale de lumière pseudo-thermique et ainsi que nous l'avons vu dans le chapitre 3, la simplification apportée par le caractère Gaussien de $Z(\theta)$, est très appréciable.

En effet, elle réduit le problème à la détermination des valeurs propres λ_k de l'équation intégrale (III-30), lesquelles entraînent, à leur tour, la connaissance de la fonction génératrice $Q(s)$, suivant la relation :

$$(VI-21) \quad Q(s) = \prod_k \left(1 + \frac{\langle n \rangle}{t} s \lambda_k \right)^{-1}$$

La densité de probabilité $p(n, T)$ de compter n photoélectrons dans l'intervalle $(0, t)$ se déduit simplement de $Q(s)$ par la relation

$$(VI-22) \quad p(n, t) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{ds^n} Q(s) \Big|_{s=1}$$

La détermination de $W_n(0|t)$ s'obtient alors après deux opérations effectuées sur $p(n, t)$ ainsi calculée : dérivation seconde par rapport à t de $p(n, t)$ afin de parvenir à la relation de récurrence (VI-5), puis double sommation des valeurs de $p''(n, t)$ ainsi calculée selon l'équation (VI-8).

VI-3. b) Cas d'un champ à fonction de cohérence exponentielle

Nous avons déjà signalé, dans le chapitre 3, que pour un noyau exponentiel, la résolution de l'équation intégrale (III-30) devenait explicitement possible.

Toutefois, ayant à traiter en vue d'une vérification expérimentale le cas où le noyau est Gaussien, nous nous contenterons d'indiquer les grandes lignes du calcul conduisant à l'expression de $W_n(0|t)$.

Le calcul de $Q(s)$ a été effectué par G. Bédard⁽⁵⁾ dans un but différent du notre. Rappelons l'expression de $Q(s)$ écrite en (III-37) :

$$(VI-23) \quad \left[ch \frac{z}{\Gamma t} + sh \frac{z}{\Gamma t} \left(\frac{\Gamma t}{2z} + \frac{z}{2\Gamma t} \right) \right] Q(s) = e^{\Gamma t}$$

$$\text{où } z^2 = 2 \Gamma t \langle n \rangle s + \Gamma^2 t^2$$

et Γ est tel que la fonction de cohérence soit :

$$\gamma(\tau) = \exp(-\Gamma|\tau|)$$

Appliquons la formule de différentiation d'un produit à l'ordre n , à l'expression (VI-23), nous obtenons :

$$(VI-24) \quad n! p(n,t) = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n+r+1} \binom{n}{r} r! p(r) \left[P_{n-r}(s,t) \right]_{s=1}$$

où

$$(VI-25) \quad P_\ell(s,t) = Q(s) e^{\Gamma t} \left(\frac{\langle n \rangle \Gamma t}{z} \right)^\ell \left\{ \frac{1}{2} \Gamma t i_\ell(z) + z \left(1 + \frac{1}{2\Gamma t} \right) i_{\ell-1}(z) + \frac{z^2}{2\Gamma t} i_{\ell-2}(z) \right\}$$

et $i_\ell(z)$ la fonction de Bessel sphérique modifiée d'ordre ℓ et de première espèce

Soit, finalement en vertu de (VI-8)

$$(VI-26) \quad W_n(0|t) = \frac{1}{\langle I \rangle} \sum_{m=0}^n \sum_{\ell=0}^m \left\{ \frac{1}{\ell!} \sum_{r=0}^{\ell-1} (-1)^{\ell+r+1} \binom{\ell}{r} r! \frac{d^2}{dt^2} (p(r) \cdot [P_{\ell-r}(s,t)]_{s=1}) \right\}$$

On voit donc que dans le cas lumière thermique à fonction de corrélation exponentielle (T.f.E.), les calculs peuvent être menés rigoureusement jusqu'au bout ;

leur exploitation numérique se faisant, cependant, sur ordinateur.

VI-3. c) Champ à fonction de cohérence Gaussienne. Méthode numérique

La fonction de cohérence n'étant pas du type exponentiel, la résolution de l'équation intégrale ne peut se faire que par une méthode numérique.

Partons de l'équation (III-30)

$$(VI-27) \quad \lambda_n \varphi_n(u) = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \gamma(u-\tau) \varphi_n(\tau) d\tau$$

Le problème intermédiaire est l'observation des valeurs propres λ_n .

Utilisons les coefficients de Fourier de $\varphi_n(u)$ et de $\gamma(u-\tau)$; soient

$$(VI-28) \quad A_{nk} = \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \varphi_n(u) e^{2\pi i k \frac{u}{t}} du$$

et

$$(VI-29) \quad B_{nk} = \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \gamma(u-\tau) e^{2\pi i k \frac{(u-\tau)}{t}} d(u-\tau)$$

Portons ces expressions dans (VI-27), il vient

$$\sum_m \lambda_n A_{nm} e^{-2\pi i m \frac{u}{t}} = t^2 \sum_k \sum_m \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \gamma(x) e^{2\pi i k \frac{x}{t}} dx \right] A_{nk} \times e^{-\frac{2\pi i k u}{t}} e^{\frac{2\pi i (k-m) \tau}{t}} d\tau$$

Posons

$$R_{km} = \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left[\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \gamma(x) e^{2\pi i k \frac{x}{t}} dx \right] e^{2\pi i (k-m) \frac{\tau}{t}} d\tau$$

on trouve :

$$\frac{1}{t} \sum_m \lambda_m A_{nm} e^{-2\pi i m \frac{u}{t}} = \sum_m \left(\sum_k R_{km} A_{kn} \right) e^{-2\pi i m \frac{u}{t}}$$

Soit encore

$$(VI-30) \quad \lambda_n A_{nm} = t \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{nk} R_{km}$$

qui constitue l'équation matricielle équivalente à (VI-27).

Soient a_m , b_m , et c_m les coefficients de Fourier de $\gamma(u)$ et de $u\gamma(u)$

$$(VI-31) \quad a_m = \frac{2}{t} \int_0^t \gamma(u) \cos \left(2\pi \frac{mu}{t} \right) du$$

$$(VI-32) \quad b_m = \frac{2}{t} \int_0^t \gamma(u) \sin \left(2\pi \frac{mu}{t} \right) du$$

$$(VI-33) \quad c_m = (2t) \int_0^t \frac{u}{t} \gamma(u) \cos \left(\frac{2\pi mu}{t} \right) du$$

On montre alors ⁽³³⁾ que les éléments de matrice R_{km} s'écrivent très simplement en fonction de a_m , b_m et c_m . Soit :

$$(VI-34) \quad R_{km} = (-1)^{k+m+1} \frac{b_k - b_m}{2\pi(k-m)} \quad \text{pour } k \neq m$$

et

$$(VI-35) \quad R_{km} = a_m - c_m \quad \text{pour } k = m$$

Le calcul des éléments de la matrice R revient donc à intégrer les expressions (VI-31), (VI-32) et (VI-33). On utilise pour cela un programme numérique de transformée de Fourier (FFT) dérivé du programme "FORIT" (cf. fiches IBM - p. 946-990).

Pour résoudre l'équation (VI-30), il faudrait naturellement une taille infinie pour la matrice R . Ceci n'étant pas possible, il nous faut réduire la matrice à un nombre fini d'éléments. Les résultats numériques que nous obtiendrons ne seront donc qu'approchés.

Nous limitant à une matrice 49×49 , pour des raisons d'économie de temps machine et parce qu'une taille plus grande n'améliore pas sensiblement la précision (l'expérience a été faite avec une matrice 99×99), et sachant que R est réelle et symétrique, nous avons obtenu les valeurs propres cherchées par l'utilisation du programme "EIGEN" (cf. fiches IBM - p. 164), dérivé de

la méthode de Jacobi ⁽⁴⁹⁾ qui consiste à annuler, chacun à leur tour, les éléments non diagonaux de R par des transformations orthogonales élémentaires.

Les λ_k obtenus sont conservés dans la mémoire de l'ordinateur et à chaque λ_k , nous associons le $\Pi_k(n, t)$ correspondant par la relation

$$(VI-36) \quad \Pi_k(n, t) = \frac{(\lambda_k \langle n \rangle)^n}{(1 + \lambda_k \langle n \rangle)^{n+1}}$$

A ce stade du calcul, nous sommes en possession de la suite des λ_k valeurs propres de (VI-30) et à chacune de ces $r = 49$ valeurs propres, nous sommes en mesure d'associer la densité de probabilité $\Pi_k(n, t)$ correspondante suivant la relation (VI-36) et aussi la fonction génératrice $Q_k(s, t)$, puisque :

$$(VI-37) \quad Q_k(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-s)^n \Pi_k(n, t)$$

Notons que $\Pi_k(n, t)$ et $Q_k(s, t)$ ne constituent qu'un intermédiaire de calcul et ne sont d'aucun intérêt expérimental.

Dès lors, la fonction génératrice correspondant à l'ensemble des r λ_k , s'écrit :

$$(VI-38) \quad Q(s, t) = \prod_{k=1}^r Q_k(s, t)$$

Soit, et c'est ce qui nous importe, une formule de corrélation pour les $p(n, t)$

$$(VI-39) \quad p(n, t) = \sum_{q=0}^n \left(\sum_{j=0}^q \left(\dots \left(\sum_{k=0}^{\ell} \Pi(k, t) \Pi(\ell-k, t) \right) \dots \Pi(q-j, t) \right) \right) \Pi(n-q, t)$$

en tout $r-1$ convolutions.

VI-4 . Résultats numériques et expérimentaux.

Ayant déterminé le $p(n, t)$, il ne reste plus, pour aboutir au $W_n(0|t)$, qu'à effectuer deux opérations résumées par l'équation (VI-8) et que nous réécrivons :

$$(VI-43) \quad W_n(0|t) = \frac{1}{\langle I \rangle} \left\{ \sum_{m=0}^n \sum_{\ell=0}^m \frac{d^2}{dt^2} p(\ell, t) \right\}$$

Notons qu'à l'erreur introduite par la réduction à une taille finie de la matrice R , vont s'ajouter d'autres erreurs dues à la dérivation numérique. Nous expliquons, plus loin, les tests que nous effectuons afin de nous assurer que malgré ces erreurs, le résultat final reste une excellente approximation du calcul rigoureux.

VI-4.a. Tests et critiques de la méthode.

1°) Effectuons tout d'abord les calculs exacts possibles dans le cas d'une fonction de corrélation exponentielle.

Nous les obtenons à partir des équations (VI-25) et (VI-26) et constituent pour nous, malgré la dérivation numérique par lesquels nous les déduisons, des résultats rigoureux.

2°) Ici, les tests ont essentiellement pour but de chiffrer la précision de la méthode, limitée surtout par la troncature de la matrice à un nombre fini de termes. La dérivation numérique est aussi, bien sûr, source d'imprécisions.

Les tests choisis sont les suivants :

- $\tau_c \rightarrow \infty$: retrouver les résultats établis dans les paragraphes précédents.
- $\tau_c \rightarrow 0$: retrouver les résultats connus pour un processus de Poisson pur.
- τ_c quelconque : spectre Lorentzien.

Les résultats obtenus par méthode numérique doivent être identiques, aux erreurs de calcul machine près, à ceux déduits des calculs algébriques (VI-26).

- τ_c quelconque spectre Gaussien.

On contrôle que l'augmentation de la taille de la matrice (99×99) influe peu sur les résultats précédents (49×49).

Remarquons enfin que dans ce dernier cas pour lequel le temps machine est le plus long, obtenir $W_n(o|t)$ avec $(0 < n < 31)$ demande environ 1 heure de calcul sur l'ordinateur IBM 360 du CIRCE (Orsay).

VI-4.b) Courbes théoriques

Nous commençons d'abord par vérifier que les calculs machine sont identiques aux calculs algébriques exacts lorsque ceux-ci sont possibles à traiter : cas de la lumière thermique à spectre Lorentzien.

La figure (3) résume l'essentiel des tests à l'ordinateur des calculs numériques que nous avons effectués avec les valeurs numériques suivantes $n = 7$, $\langle I \rangle = 5.10^5$ coups/sec et τ_c compris entre 1 μs et 100 μs . Les bornes supérieures et inférieures de τ_c sont choisies comme cas limites où nous retrouvons pour processus ponctuel initial respectivement le processus de Poisson pur ($\tau_c \rightarrow 0$) et le processus de Poisson composé à temps de cohérence très grand ($\tau_c \rightarrow \infty$). Nous vérifions ensuite dans deux cas particuliers intermédiaires $\tau_c = 5,65 \mu s$ et 10 μs que les calculs numériques méthode matricielle avec spectre Lorentzien se confondent avec les résultats exacts obtenus par la méthode G. Bédard, résumée par l'équation (VI-26), dans la limite de précision de la machine (de l'ordre de 1%) ; cette limitation est surtout due aux erreurs introduites par les dérivations numériques.

Remarquons enfin que pour le cas laser, la convergence vers la loi de Gauss est beaucoup plus rapide que pour les autres types de sources ; il n'y a, en effet, sur la courbe laser de la figure (3), que peu d'écart entre les points de $W_7(o|t)$ et ceux d'une Gaussienne.

Examinons, à présent, le réseau de courbes de la figure (4) où nous représentons en coordonnées semi-logarithmiques la loi $W_n(o|t)$ ($0 < n < 31$).

pour la lumière thermique à spectre Gaussien avec $\langle I \rangle = 10^6$ c/s et $\tau_c = 5,65 \mu s$.

Ici la tendance asymptotique est plus difficile à étudier que dans les cas précédents.

Toutefois, nous pouvons faire quelques remarques :

a) les courbes admettent, à partir de $n > 3$, deux maxima, d'amplitudes différentes et fonctions de n .

b) les abscisses de ces maxima peuvent être vues comme les abscisses des maxima correspondant respectivement, le premier au cas thermique à $\tau_c \rightarrow \infty$, le deuxième au cas laser.

c) l'ordonnée du premier maximum tend vers 0, approximativement, comme $\frac{1}{n^2}$

d) pour $n = 31$, le deuxième maximum devient prépondérant et l'allure de la courbe est très voisine de celle de Gauss ; ce qui montre, qu'à la limite des n élevés, la tendance vers la loi normale semble satisfaite même dans le cas de la non-indépendance des variables additionnées.

e) enfin et pour bien cerner l'influence du spectre dans l'addition des variables aléatoires corrélées, nous avons représenté sur la figure (5) $W_0(o|t)$ dans deux cas intéressants : spectre Lorentzien et spectre Gaussien.

L'écart entre les deux distributions est bien à attribuer à la différence des spectres, comme on peut le voir en écrivant pour $t \gg \tau_c$: $W(o|t) \approx \frac{e^{-\langle I \rangle t}}{\langle I \rangle} \Gamma_I(t)$.

Ceci montre que l'aspect Gaussien des courbes obtenues pour $n \geq 17$ (figure (4)) est dû à l'addition des variables aléatoires et non à la forme du spectre.

VI-4.c) Courbes expérimentales

Pour illustrer quelques résultats théoriques établis plus haut, nous avons réalisé des expériences de statistique d'intervalles multiples à l'aide du dispositif représenté sur la figure (5) du chapitre II.

a) A temps de cohérence long ($\tau_c > 100 \mu s$).

α) à n faible

Se limitant à $n = 3$ et $\langle I \rangle = 5 \cdot 10^5$ c/s, les expériences peuvent être faites sur plusieurs types de champ, et la figure (1) montre comment se situent les courbes $W_3(0|t)$ les unes par rapport aux autres. On remarque que le comportement de ces courbes aux t grands est essentiellement fonction de l'effet de groupement.

L'accord entre les points expérimentaux et la théorie obtenue en introduisant la valeur de $\langle I \rangle$ mesurée expérimentalement est satisfaisant sauf peut être dans la région voisine de l'origine.

β) champ laser, n grand.

L'expérience est ici, possible à densité élevée ($\langle I \rangle \approx 4,65 \cdot 10^6$ c/s) ce qui nous permet de prendre $n = 63$ sans que le temps de stockage exède la demi-heure. On vérifie par cette voie sur la courbe (2) le théorème central limite pour l'addition de 64 variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Les valeurs de $\langle t \rangle$ et de σ_t^2 déduites du calcul ($\langle t \rangle = \frac{n}{\langle I \rangle}$ et $\sigma_t^2 = \frac{n+1}{\langle I \rangle^2}$) avec $n = 64$ sont vérifiées à 10% par notre expérience.

b) A temps de cohérence quelconque : lumière thermique à spectre Gaussien

- loi de $W_0(0|t)$

Après avoir noté sur la figure (5) l'influence de l'allure du spectre sur la loi des intervalles et avant de passer aux valeurs de n élevées, nous notons sur la courbe de la figure (6) le bon accord entre les résultats expérimentaux et les calculs théoriques ($\tau_c = 5,65 \cdot 10^{-6}$ s.; $\langle I \rangle = 7,5 \cdot 10^5$ c/s).

- loi de $W_n(0|t)$

Nous avons choisi, afin d'obtenir le plus grand nombre de courbes dans la même gamme (1- 10 μs), d'utiliser un temps de cohérence de l'ordre de 2,5 μs , une intensité moyenne $\langle I \rangle = 5 \cdot 10^6$ c/s et de ne représenter sur la figure (7)

que les résultats pour $n = 7, 15, 31$.

L'accord entre la théorie et l'expérience n'est pas excellent, surtout pour $n = 7, 15$, essentiellement parce que, apparaissent des problèmes de stabilité de la source optique, l'expérience se prolongeant sur un temps voisin de 1'heure.

Néanmoins, compte-tenu de cette variation de la densité moyenne, nous pouvons considérer que les points expérimentaux concordent assez bien avec les calculs théoriques (traits pleins).

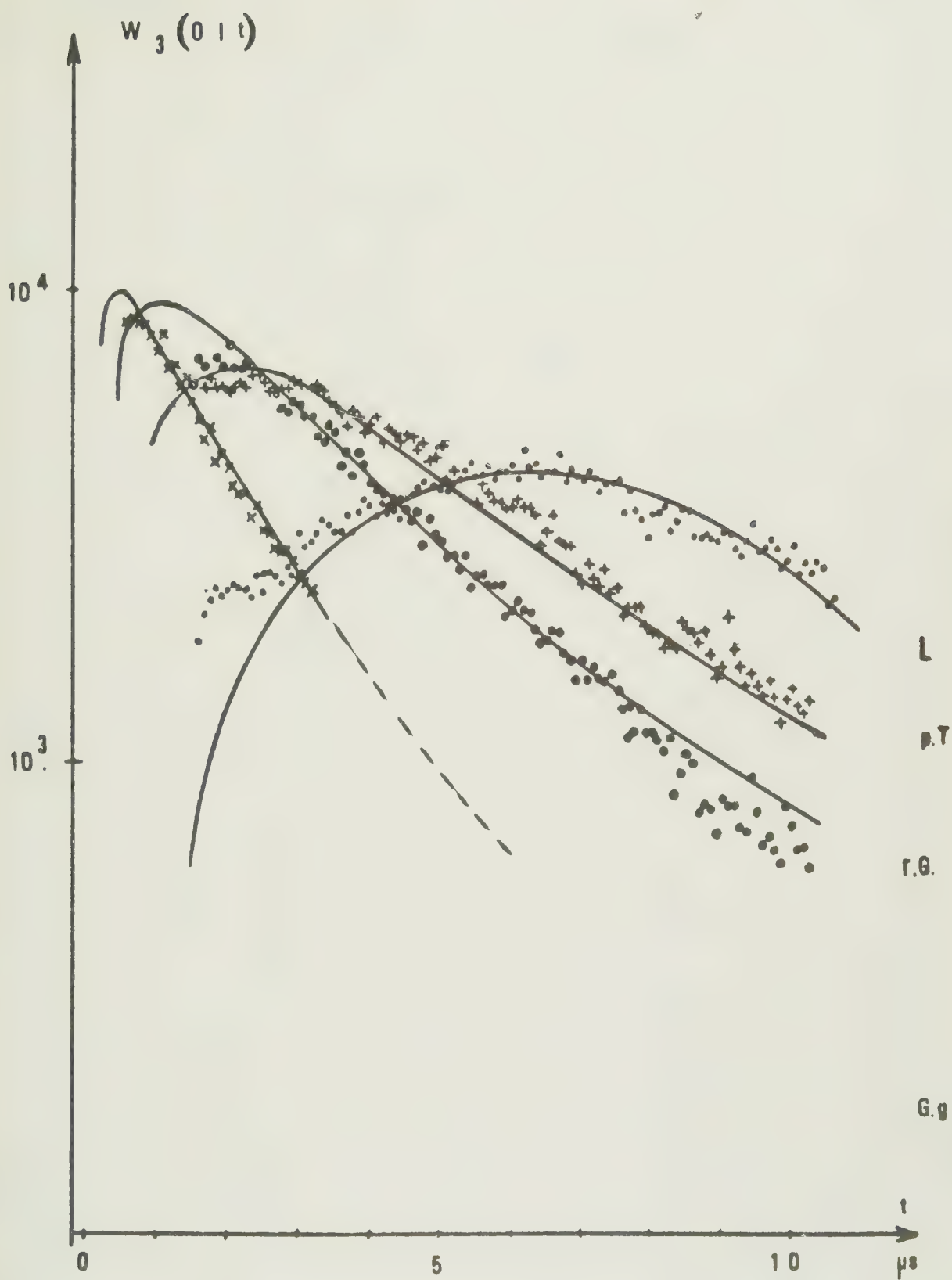


Fig.1- Intervalles multiples ($n=3$, $\langle I \rangle \approx 5 \cdot 10^5$ s, $\tau_c \rightarrow \infty$)

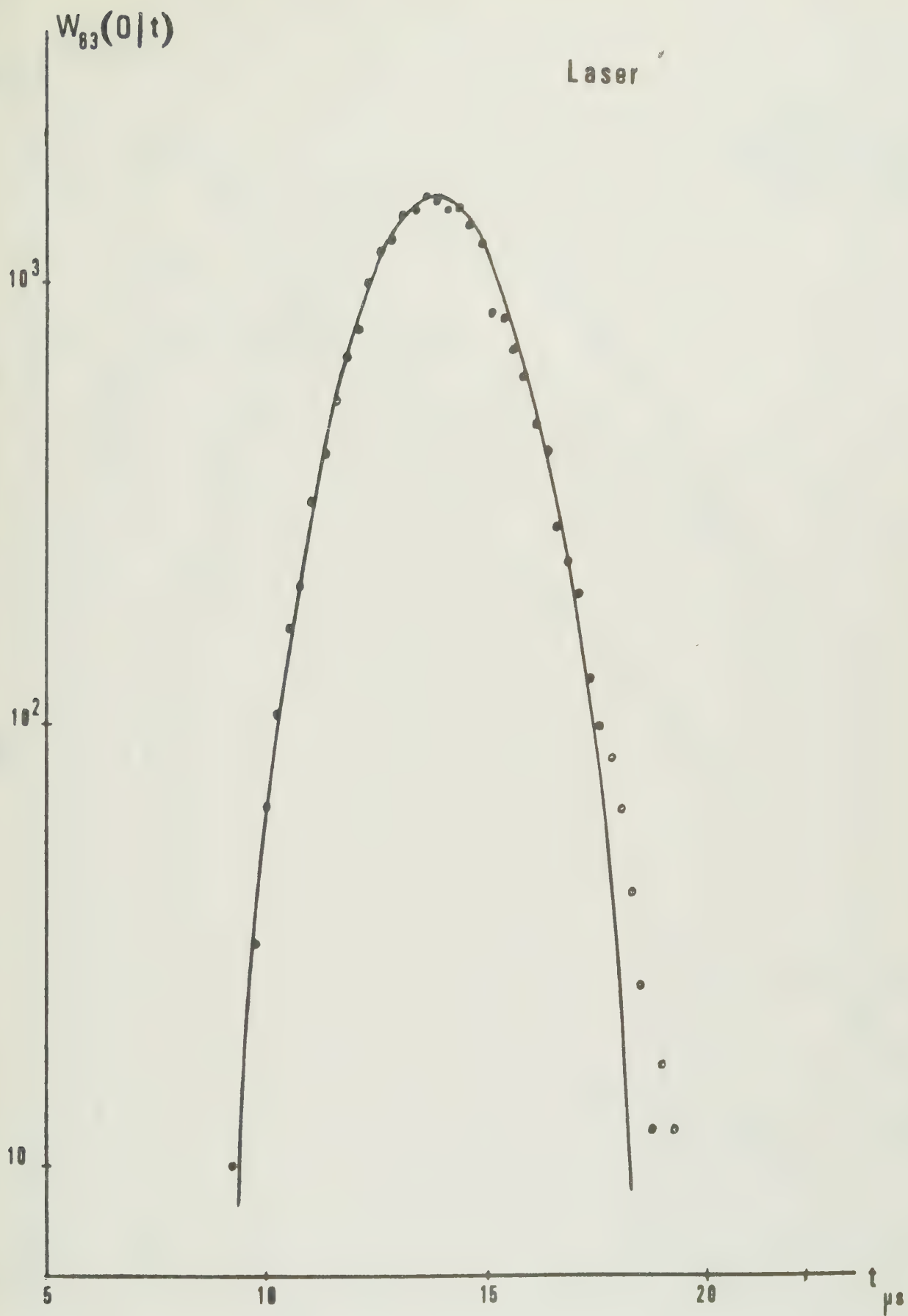


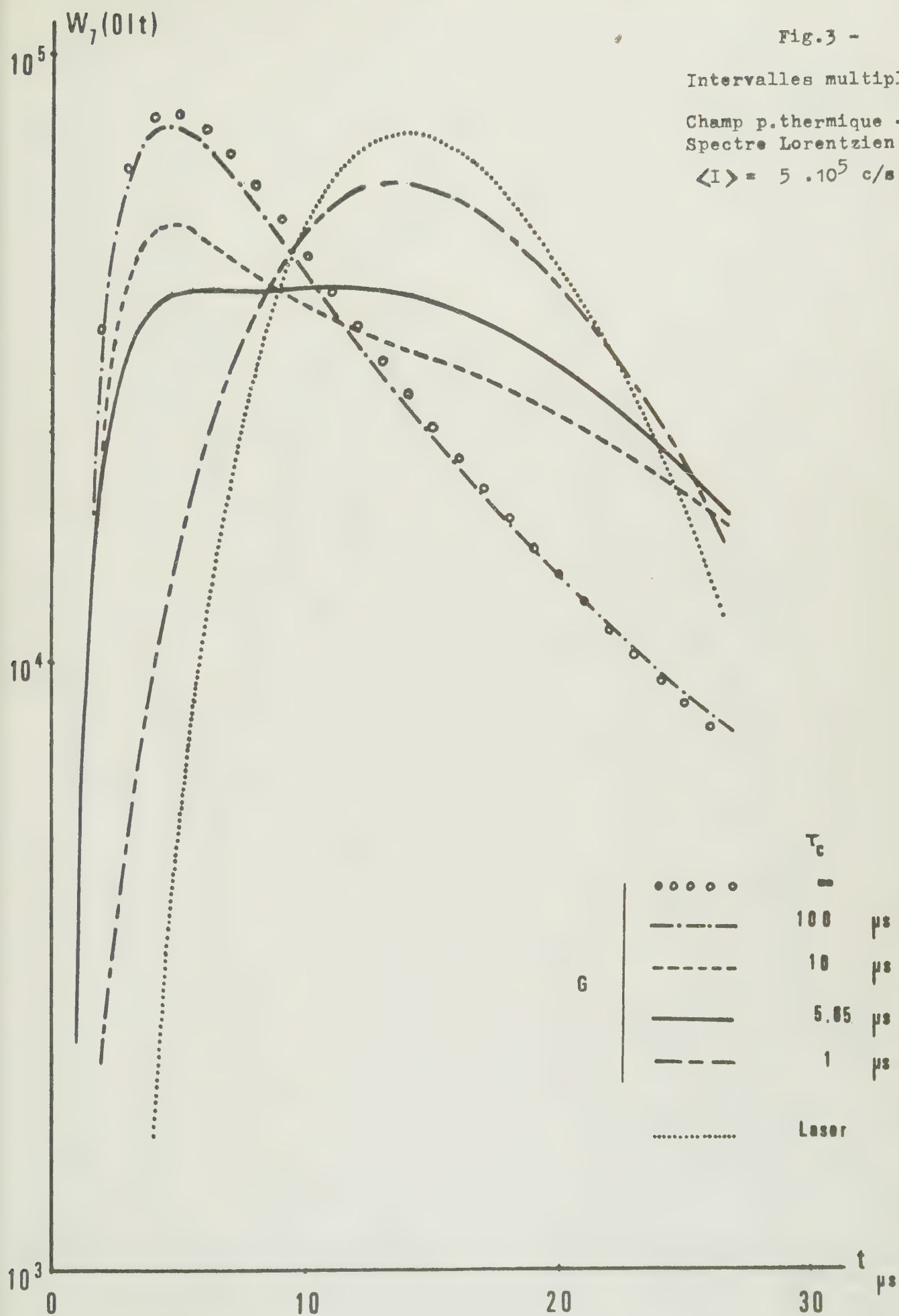
Fig.2- Intervalles multiples ($n=63$, $\langle I \rangle \approx 5,5 \cdot 10^6$ c/s)

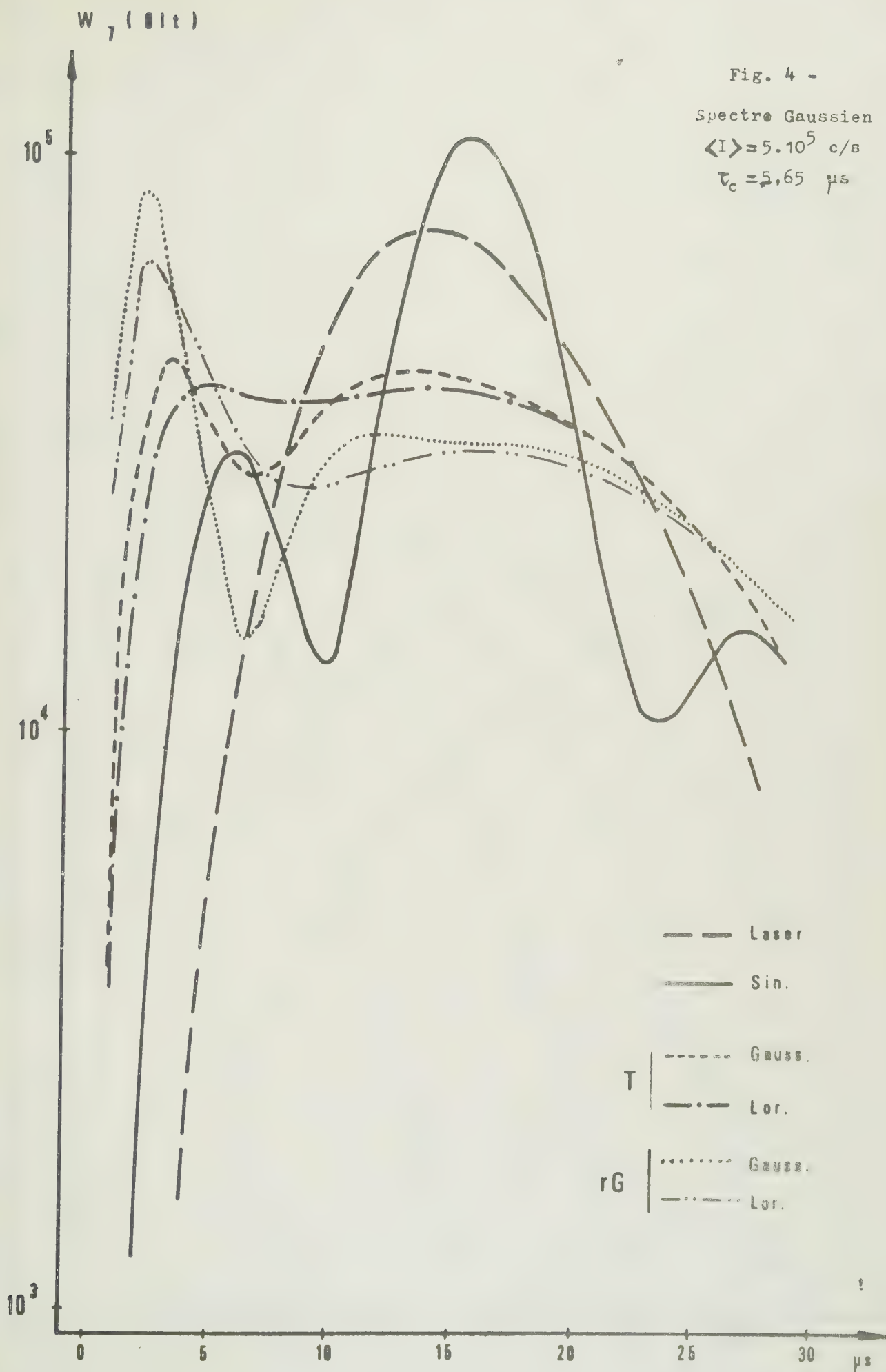
Fig.3 -

Intervalles multiples

Champ p.thermique -
Spectre Lorentzien

$$\langle I \rangle = 5 \cdot 10^5 \text{ c/s}$$





$W_n(0|t)$

Fig.5 -

Champ p.thermique à spectre
Gaussien

($\langle I \rangle \approx 10^6$ c/s ; $\tau_c = 5,65 \mu s$)

n

31

23

15

0

3

7

11

t
 μs

10^5

10^4

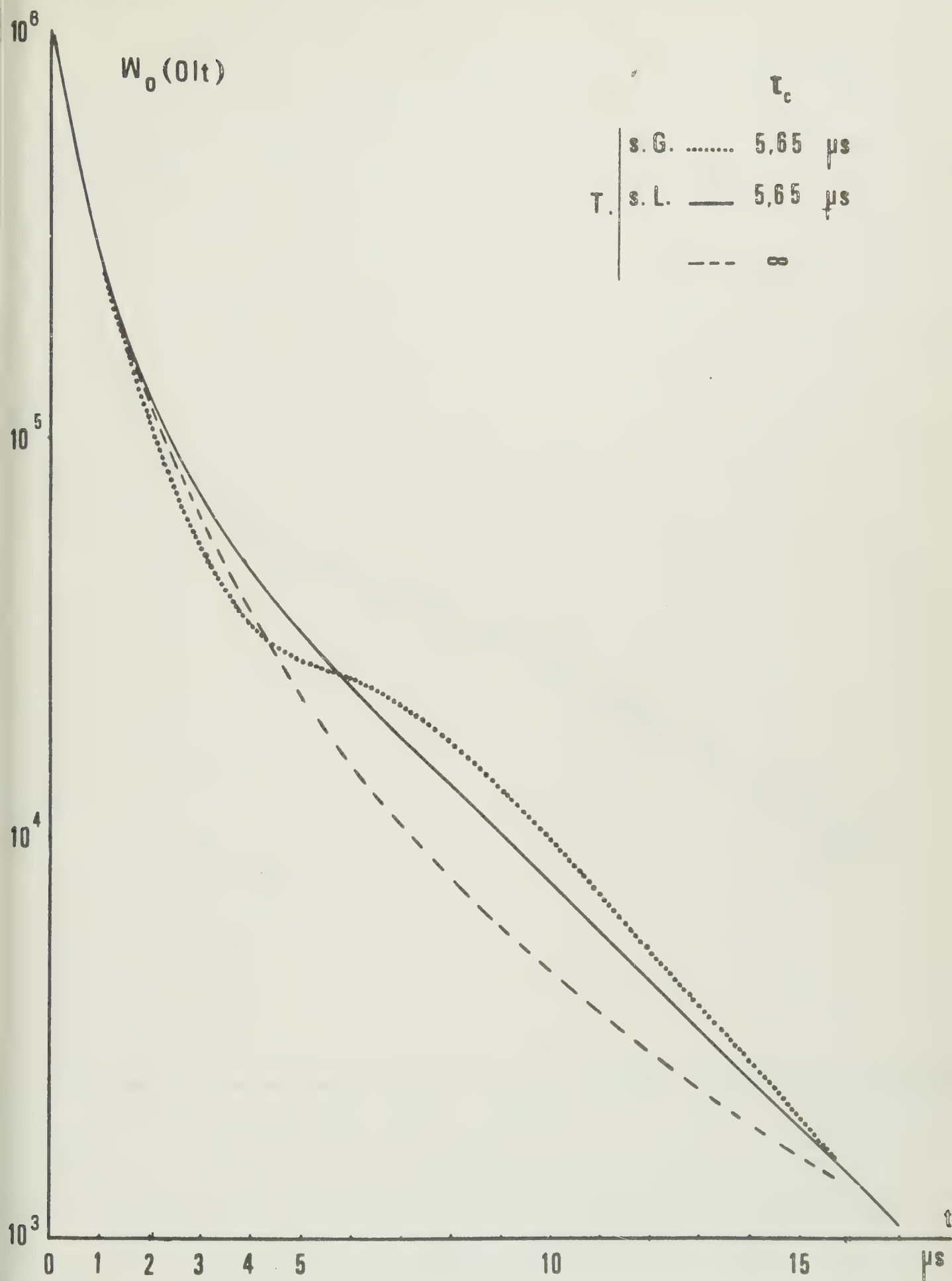


Fig.6-Intervalle simple à t quelconque -Champ pseudo-thermique

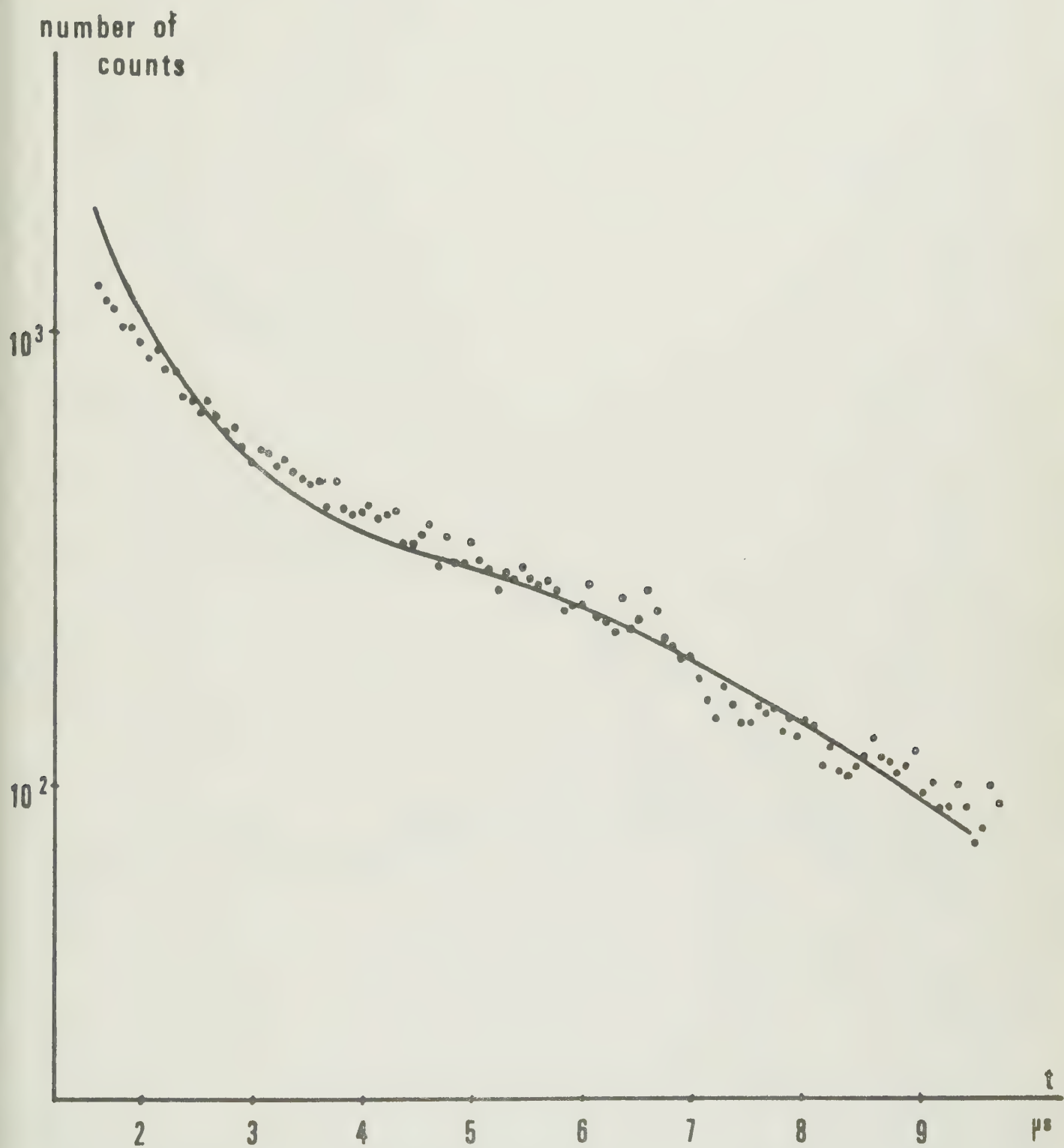


Fig.7- Intervalle simple -Champ pseudo- thermique à
spectre Gaussien ($\langle I \rangle \approx 7,5 \cdot 10^5$ c/s
 $\tau_c \approx 5,65 \mu s$)



Fig.8- Intervalles multiples : Champ pseudo-thermique à spectre

Gaussien - $\langle I \rangle = 5 \cdot 10^6$ c/s ; $\tau_c = 2,5 \mu s$; $n = 7, 15, 31$

CONCLUSIONS

Ayant confirmé de façon très satisfaisante les calculs théoriques sur les processus liés à la détection de photons issus d'une source laser monomode fonctionnant au dessus du seuil, et prouvant ainsi le fonctionnement correct du dispositif expérimental réalisé, nous avons étudié les propriétés statistiques d'intensité de sources modulées en amplitude : par verre dépoli (champ Gaussien) et par cristal de KDP (champ Gaussien réel et champ à double modulation Gaussienne).

L'ensemble des résultats expérimentaux obtenus vérifient convenablement les prédictions théoriques et donnent pour conclusion essentielle une accentuation de l'effet de groupement sous l'action de la modulation d'intensité.

Les expériences de comptage nous ayant donc renseigné sur la nature statistique des amplitudes des sources étudiées, nous nous sommes intéressés à l'aspect cohérence temporelle de ces champs.

Nous avons alors étudié et comparé différentes méthodes expérimentales de mesure de fonction de corrélation d'intensité et spécialement vérifié la validité d'un modèle simple de diffusion de la lumière laser par verre dépoli conduisant à une allure Gaussienne pour la fonction de corrélation des fluctuations d'intensité.

Généralisant ensuite des calculs sur la fonction de corrélation d'intensité après écrétage, nous avons considéré sur des exemples de champs non Gaussiens, la limite d'application de ces calculs et montré qu'il n'y avait pas en général de relation linéaire entre la fonction de corrélation de l'intensité et le carré du module de la fonction de corrélation du champ.

Enfin développant une méthode numérique de résolution d'équation intégrale établie par G. Lachs pour le calcul des lois de comptages dans le cas d'un champ Gaussien à spectre Gaussien, nous avons étudié la loi d'addition de variables aléatoires corrélées et discuté l'aspect asymptotique de cette loi.

Utilisant alors la source pseudo-thermique pour laquelle nous avons vérifié que le champ était très proche d'une loi Gaussienne et de spectre Gaussien, nous avons apporté une vérification expérimentale aux prévisions théoriques : l'importance de la forme de la fonction de corrélation y est particulièrement signalée.

REFERENCES

- (1) F.T. ARECCHI et col.
Phys. Rev. Lett. 17, (1966), 260.
- (2) F.T. ARECCHI et Col.
IEEE Jour. Quant. Elect., QE-2, (1966), 341.
- (3) F.T. ARECCHI.
Lectures given at the Int. School of Physics XLII - Varenna - CISE -
Documentation service - (1967).
- (4) G. BEDARD
Phys. Rev. 151, (1966), 1038.
- (5) G. BEDARD
Phys. Rev. 161, (1967), 1304.
- (6) C. BENDJABALLAH
Comptes Rendus Acad. Sc. 268, (1969), 1719.
C. BENDJABALLAH
Phys. Lett. 31-A, (1970), 471.
C. BENDJABALLAH
Comptes Rendus Acad. Sc. 272, (1971), 1244.
- (7) C. BENDJABALLAH et F. PERROT
Optics Comm. 3, (1971), 21.
- (8) C. BENDJABALLAH et F. PERROT
Appl. Phys. Lett. 18, (1971), 532.
C. BENDJABALLAH
(à paraitre dans Journal of Physics A).
- (9) M. BERTOLOTI et col.
Jour. Phys. A, L 37, (1970).
- (10) A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET
Théorie des fonctions Aléatoires - Masson (1953).

- (11) A. BLANC-LAPIERRE
Modèles Statistiques pour l'étude de phénomènes de fluctuations -
Masson (1963).
- (12) A. BLANC-LAPIERRE et B. PICINBONO
Propriétés Statistiques du bruit de fond - Masson (1961).
- (13) R.F. CHANG et col.
Phys. Lett. 24-A, (1967), 613.
- (14) F. DAVIDSON et L. MANDEL
Jour. Appl. Phys. 37, (1968), 62.
- (15) W.B. DAVENPORT et W.L. ROOT
An Introduction to the Theory of random signals and Noise - Mc Graw-Hill
Book Comp. (1958), p. 96.
- (16) D. DIALETIS
Jour. Phys. A-2, (1969), 229
- (17) P. DIAMENT et M.C. TEICH
Jour. Opt. Soc. Amer. 60, (1970), 682.
- (18) L. ESTES et col.
Phys. Rev. A-1, (1970), 710.
- (19) L. ESTES et col.
Jour. Opt. Soc. Amer. 61, (1971), 1301.
- (20) R. FOORD et col.
Nature 227, (1970), 242.
- (21) P. FURCINITTI et col.
(communication privée).
- (22) R.J. GLAUBER
dans Optique et Electroniques Quantiques, C de Witt, A. Blandin et C. Cohen-
Tannoudji, Editeurs (Gordon and Breach, New York 1964) p. 65.

- (23) R.J. GLAUBER
dans Modern Optics, Polytechnic Institute of Brooklyn (New York 1967), p. 1-18
- (24) R.J. GLAUBER
dans Quantum Optics, S.M. Kay et A. Maitland, Editeurs (academic Press
Londres 1970), p. 53.
- (25) I.S. GRADSHTEYN et I.M. RYZHIK
Table on Integrals, series and products (Academic Press - 1965) p. 1061-1064.
- (26) R. HANBURY-BROWN and R.Q. TWISS
Nature, 178 (1956), 1447.
- (27) H. HODARA
IEEE Jour. of Quant. Elect. QE-2, (1966), 337.
- (28) E. JAKEMAN et E.R. PIKE
Jour. of Phys. A-1, (1968), 128.
Jour. of Phys. A-2 (1969), 411.
- (29) A.K. JAISWAL et G.S. AGARWAL
Jour. Opt. Soc. Amer. 59, (1969), 1446.
- (30) P.L. KELLY et W.H. KLEINER
Phys. Rev. 136, (1964), A 316.
- (31) M.G. KENDALL et A. STUART
The Advanced Theory of statistics, 3rd Edition (Griffin, Londres 1969),
Vol. 1, Chapitre 3.
- (32) J.R. KLAUDER et E.C.G. SUDARSHAN
Fundamentals of Quantum Optics, (W.A. Benjamin Inc 1968).
- (33) G. LACHS
Jour. App. Phys. 42, (1971), 602.
- (34) Mc FADDEN
IRE Transactions on IT-4, (1958), 14.

- (35) W. MARTIENSSEN et E. SPILLER
Phys. Rev. 145, (1966), 285.
- (36) L. MANDEL
Proc. Phys. Soc. (London) 72, (1958), 1037.
- (37) L. MANDEL et E. WOLF
Rev. Mod. Phys. 37, (1965), 231.
- (38) C.L. MEHTA et A.K. JAISWAL
Phys. Rev. A-2, (1970), 168, 2570.
- (39) D. MELTZER et L. MANDEL
Jour. Quant. Elect. QE-6, (1970), 661.
- (40) B.L. MORGAN et L. MANDEL
Phys. Rev. Lett. 16, (1966), 1012.
- (41) J. PERINA
dans Quantum Optics, Ref. 24 page 513.
- (42) F. PERROT
Thèse 3ème Cycle - Orsay (1971).
- (43) B. PICINBONO
Introduction à l'étude des Phénomènes Aléatoires, Dunod Editeur Paris (1971).
- (44) B. PICINBONO et col.
Jour. Math. Phys. 11, (1970), 2166.
- (45) B. PICONBONO et M. ROUSSEAU
Phys. Rev. A-1, (1970), 635.
- (46) B. PICINBONO
Phys. Rev. A-4, (1971), 2398.
- (47) B. PICONBONO et E. BOILEAU
Jour. Opt. Soc. Amer. 58, (1968), 784.

- (48) E.R. PIKE
dans Quantum Optics, Réf. 24, p. 127.
- (49) A. RALSTON et H.S. WILF
Méthodes mathématiques pour calculateurs arithmétiques- Dunod Paris (1965)
Chapitre 7.
- (50) lord RAYLEIGH
Theory of Sound, Dover publications (1945), volume 1.
- (51) M. ROUSSEAU
Journal de Physique, 30, (1969), 675.
- (52) M. ROUSSEAU
Journal Opt. Soc. Amer. 61, (1971), 1307.
- (53) D.B. SCARL
Phys. Rev. 175, (1968), 1661.
- (54) M.O. SCULLY et W.E. LAMB Jr
Phys. Rev. 179, (1969), 179.
- (55) D. -SLEPIAN,
B.S.T. J.37 (1958), 163.
- (56) V.G. TUNKIN et A.S. CHIRKIN
Soviet Phys. J.E.T.P. 31, (1970), 107.
- (57) J.H. VAN VLECK et D. MIDDLETON
Proc. IEEE 54, (1966), 2
- (58) E.T. WHITTAKER et G.N. WATSON
A course of Modern Analysis, 4e Edition. Cambridge University Press- (1965)
- (59) A. YARIV
Quantum Electronics, (John Wiley, New York - 1968), p. 224.

